EQUACIONS DE 1r I 2n GRAU, SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

1. Aïlla la x en les següents equacions:

a) x+8=0 **b)** x-3=12 **c)** 2x=14 **d)** –5x=30 **e)** 3x+10=7

f) $\frac{x}{4}=6$ **g)** $\frac{x}{3}-1=2$ **h)** $\frac{2x+9}{5}=3$ **i)** $\frac{4x-1}{2}+7=11$

Una equació amb una incògnita és de primer grau si, ordenada i simplificada té la forma ax+b=0

→ restant b als dos costats de l'equació → ax= –b → dividint entre a → x= –b/a

Totes les equacions de primer grau tenen una única solució.

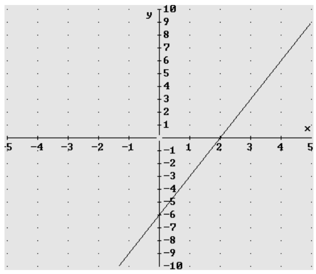
- ex: resoldre 3x–6=0 → 3x=6 → x=6/3=2

Gràficament, resoldre una equació de primer grau amb una incògnita és el mateix que obtenir el punt on la recta y=ax+b talla l'eix d'abscisses (OX).

- ex: resoldre gràficament 3x–6=0 es obtenir el punt on la recta y=3x–6 talla l'eix OX.

x	y
0	-6
2	0

donant valors a una de les variables i calculant els que li corresponen a l'altra, podem obtenir una petita taula de valors i, posteriorment, representar la recta. A la gràfica es pot observar que la recta talla l'eix abscisses al punt (2,0), tal com s'havia calculat abans.



2. Resol les següents equacions de primer grau i comprova, posteriorment, els resultats:

a) $(3x+2)^2+3(1-3x)x=2(x-11)$ **b)** $(2x-3)^2+(x-2)^2=3(x+1)+5x(x-1)$

c) $\frac{3x+2}{5}-\frac{4x-1}{10}+\frac{5x-2}{8}=\frac{x+1}{4}$ **d)** $\frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(2x-1)^2}{16}=\frac{35}{16}$

e) $\frac{x+3}{5}-\frac{(x-1)^2}{4}=-\frac{1}{4}x^2-\left(\frac{x}{2}+2\right)$ **f)** $\frac{1}{2}\left[1-(x+2)^2\right]=-x-\frac{x^2-1}{2}$

Una equació amb una incògnita és de segon grau si, ordenada i simplificada té la forma $ax^2+bx+c=0$

Casos particulars:

a) Si c=0 → $ax^2+bx=0$ → com que no té terme independent podem extraure x factor comú

→ x·(ax+b)=0 → ja que és un producte igualat a zero, qualsevol dels factors ha de ser 0

$\rightarrow \begin{cases} x=0 \\ ax+b=0 \rightarrow ax=-b \rightarrow x=-b/a \end{cases}$ aleshores tindrà dues solucions, una de les quals serà x=0

- ex: resoldre $5x^2$–15x=0 → x·(5x-15)=0 → $\begin{cases} x=0 \\ 5x-15=0 \rightarrow 5x=15 \rightarrow x=15/5=3 \end{cases}$

b) Si b=0 → $ax^2+c=0$ → restem c als dos costats de l'equació → $ax^2=-c$

→ dividim entre a → $x^2=-c/a$ → x= $\pm\sqrt{-c/a}$

només tindrà solució quan els signes d'a i de c siguen diferents.

- ex: resoldre $2x^2-8=0 \rightarrow 2x^2=8 \rightarrow x^2=8/2=4 \rightarrow x=\pm\sqrt{4}=\left\langle \begin{array}{l} x=+2 \\ x=-2 \end{array}\right.$
- ex: resoldre $2x^2+8=0 \rightarrow 2x^2=-8 \rightarrow x^2=-8/2=-4 \rightarrow x=\pm\sqrt{-4}$ no té solucions reals.

3. Obtín les solucions de les següents equacions incompletes de segon grau:

a) $x^2=100$ **b)** $x^2-16=0$ **c)** $2x^2-128=0$ **d)** $-3x^2+75=0$
e) $3x^2+75=0$ **f)** $-3x^2-75=0$ **g)** $13x^2-52=0$ **h)** $3x^2+5=0$
i) $x^2+x=0$ **j)** $x^2-x=0$ **k)** $-x^2+x=0$ **l)** $4x^2+12x=0$
m) $7x^2+5x=0$ **n)** $-2x+10x^2=0$ **o)** $(3x+1)(3x-1)+\frac{1}{2}(x-2)^2=1-2x$
p) $\frac{x^2+2}{3}-\frac{x^2+1}{4}=1-\frac{x+7}{12}$ **q)** $\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}+\frac{(x-2)^2}{4}=\frac{3x+4}{6}+\frac{x^2}{3}$

Si <u>l'equació està completa</u>, <u>$ax^2+bx+c=0$</u> aplicarem la fórmula $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

- ex: resoldre $x^2+4x-5=0 \rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot(-5)}}{2\cdot1}=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{-4\pm6}{2}=\left\langle \begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right.$

El radicand es diu discriminant, $D=b^2-4ac$ i del seu signe depèn el <u>nombre de solucions</u>:

Si $D>0 \rightarrow$ n'hi ha dues solucions diferents ex: 4a)

Si $D=0 \rightarrow$ n'hi ha una solució doble (dos solucions iguals) ex: 4b)

Si $D<0 \rightarrow$ no n'hi ha cap solució real ex: 4c)

4. Obtín les solucions de les següents equacions completes de segon grau:

a) $x^2+4x-5=0$ **b)** $x^2-8x+16=0$ **c)** $x^2-3x+4=0$ **d)** $10x^2-3x-1=0$
e) $x^2-2x+100=0$ **f)** $3x^2+5x+11=0$ **g)** $(2x+1)^2=1+(x-1)(x+1)$
h) $\frac{(x+1)(x-3)}{2}+x=\frac{x}{4}$ **i)** $x+\frac{3x+1}{2}-\frac{x-2}{3}=x^2-2$ **j)** $\frac{x+1}{2}=x-\frac{2x+3}{4}$
k) $(x+3)^2-2(3x+6)=0$ **l)** $\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{5}{2}=0$ **m)** $(5x-3)^2-5x(4x-5)=5x(x-1)$

Podem observar en algunes de les equacions anteriors la següent <u>propietat</u>:

"En una equació de segon grau on el coeficient $a=1 \rightarrow x^2+bx+c=0$, amb dues solucions x_1 i $x_2 \rightarrow$

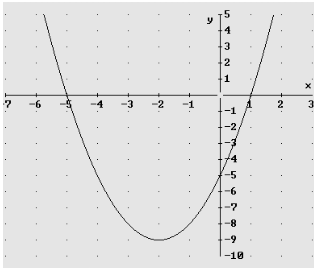
el producte de les solucions $x_1\cdot x_2=c$ (terme independent de l'equació)

la suma de les solucions $x_1+x_2=-b$ (coeficient de x, canviat de signe)"

- ex: l'equació $x^2+4x-5=0$ té com a solucions $x_1=-5$ i $x_2=1$ $\rightarrow (-5)\cdot1=-5=c$
  $\rightarrow (-5)+1=-4=-b$
- ex: fes la comprovació en algunes de les equacions resoltes anteriorment.

<u>Gràficament</u>, resoldre una equació de segon grau amb una incògnita és el mateix que obtenir els punts on la paràbola $y=ax^2+bx+c$ talla l'eix d'abscisses (OX).

- ex: resoldre gràficament $x^2+4x-5=0$ es obtenir els punts on la paràbola $y= x^2+4x-5$ talla l'eix OX.



x	y
-5	0
-2	-8
0	-5
1	0

donant valors a una de les variables i calculant els que li corresponen a l'altra, podem obtenir una petita taula de valors i, posteriorment, representar la paràbola. A la gràfica es pot observar que la funció talla l'eix abscisses al punt (–5,0) i (1,0), tal com s'havia calculat abans.

5. Resol gràficament i pels tres mètodes algebraics els sistemes d'equacions lineals:

a) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=-6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x-2y=-4 \\ 3x-y=3 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+3y=6 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x+5y=0 \\ x+y=-4 \end{cases}$

Un <u>sistema d'equacions lineals</u> és un conjunt d'equacions amb diferents incògnites, de primer grau.

Si el sistema té dues equacions i dues incògnites té la forma: $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ i resoldre'l és trobar les solucions que tenen en comú totes les equacions.

<u>Mètodes algebraics de resolució</u>:

a) <u>Substitució</u>: aïllem qualsevol incògnita de qualsevol equació i substituïm el seu valor en l'altra.

- ex: resoldre $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ $\rightarrow$ aïllem x de la 1a equació $\rightarrow$ x= –1–y $\rightarrow$ substituïm en la 2a equació

  $\rightarrow$ 2(–1–y)+y=0 $\rightarrow$ resolem l'equació de primer grau amb una incògnita que hem obtingut $\rightarrow$

  –2–2y+y=0 $\rightarrow$ –2y+y=2 $\rightarrow$ –y=2 $\rightarrow$ y= –2

  per obtenir el valor de l'altra incògnita substituïm el valor obtingut $\rightarrow$ x= –1–(–2)= –1+2=1

  aleshores, la solució del sistema és x=1 i y= –2

b) <u>Igualació</u>: aïllem qualsevol incògnita de les dues equacions i igualem els seus resultats.

- ex: resoldre $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ $\rightarrow$ aïllem y de les dues equacions $\rightarrow$ $\begin{cases} y=-x-1 \\ y=-2x \end{cases}$

  igualem expressions $\rightarrow$ –x–1= –2x $\rightarrow$ 2x–x =1 $\rightarrow$ x=1

  per obtenir el valor de l'altra incògnita substituïm el valor obtingut $\rightarrow$ y= –2·1= –2

  doncs, la solució del sistema és, evidentment, x=1 i y= –2

c) <u>Reducció</u>: multipliquem convenientment les dues equacions, de manera que en sumar-les, posteriorment, s'elimine alguna de les incògnites i puguem obtenir el valor de l'altra.

- ex: resoldre $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \cdot(-1) \rightarrow -x-y=1 \\ \rightarrow 2x+y=0 \end{cases}$ i sumem $\rightarrow$ x=1

$$\rightarrow \begin{cases} \cdot(-2) \rightarrow -2x - 2y = 2 \\ \qquad \rightarrow \ 2x + y = 0 \end{cases}$$ i tornem a sumar → -y=2 → y= -2

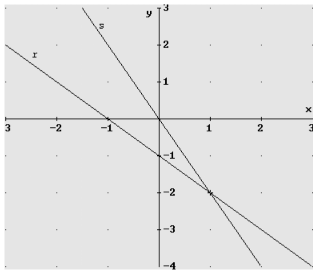
aleshores, la solució del sistema és, lògicament, x=1 i y= –2

Resoldre <u>gràficament</u> un sistema d'equacions lineals és obtenir el punt on es tallen les rectes que estan representades pel sistema corresponent.

- ex: resoldre gràficament $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ es obtenir el punts on les rectes definides per les equacions r: x+y= –1 i s: 2x+y=0 es tallen.

r: x	r: y	s: x	s: y
0	-1	0	0
-1	0	-1	2

donant valors a una de les variables i calculant els que li corresponen a l'altra, podem obtenir una petita taula de valors per a cada recta i, posteriorment, representar-les gràficament. A la gràfica es pot observar que les funcions es tallen al punt (1,–2), tal com s'havia calculat abans.



6. Resol els següents sistemes d'equacions lineals

a) $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x + 3y = -7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y = -1 \\ 3x - y = -1'25 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} + y = 1 \\ \dfrac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} + \dfrac{y+3}{4} = 1 \\ \dfrac{1-x}{2} - \dfrac{2-y}{6} = 1 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2} + \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{x+1}{4} - \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} x + 3y = 9 \\ \dfrac{x^2 - 2y + 3}{x-1} = 3 + x \end{cases}$

<u>Tipus de solucions</u> d'un sistema d'equacions lineals del tipus $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

a) <u>solució única</u>, si els coeficients de les incògnites no són proporcionals → $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$

el sistema es diu que és <u>Compatible Determinat</u>

les rectes que representen les equacions es tallen en un punt

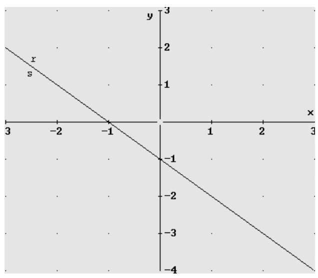
- ex: $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+y=0 \end{cases}$ ja vist amb anterioritat

b) <u>infinites solucions</u>, si tots els coeficients són proporcionals → $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

el sistema es diu que és <u>Compatible Indeterminat</u>

les rectes corresponents són en realitat una mateixa recta

- ex: $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x+2y=-2 \end{cases}$

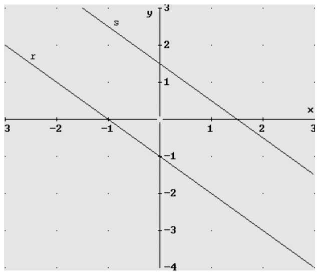


c) no en té solució, si només són proporcionals els coeficients de les incògnites → $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

el sistema es diu que és Incompatible

les rectes respectives no es tallen, són paral·leles

- ex: $\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$

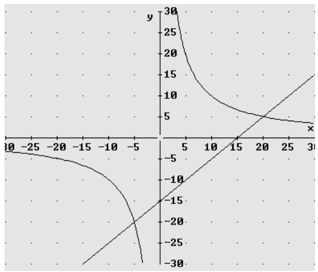


ALTRES SISTEMES I ALTRES EQUACIONS

Si el sistema és no lineal, vol dir que les equacions no són totes de primer grau, pot tenir més d'una solució i per resoldre'l s'acostuma a fer servir el mètode de substitució.

- ex: a l'activitat 7a), la primera equació és una recta, doncs és de primer grau, mentre que la segona equació representa un hipèrbola.

  Resolent el sistema algebraicament per substitució, obtenim com a solucions els punts (–5,–20) i (20,5), que són els punts on les dues funcions es tallen.



7. Quines són les solucions d'aquests sistemes d'equacions no lineals:

a) $\begin{cases} x - y = 15 \\ x \cdot y = 100 \end{cases}$ **b)** $\left.\begin{matrix} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ x + y = 1 \end{matrix}\right\}$ **c)** $\begin{cases} 2x - y = 100 \\ x^2 - y = y + 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} y + 8 = x^2 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy + 2y = 2 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ **g)** $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$ **h)** $\begin{cases} \frac{x+y}{2} - x = 1 \\ \frac{x-y}{2} + x^2 = 0 \end{cases}$

i) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ xy - y^2 = 0 \end{cases}$ **j)** $\begin{cases} x - y = 1 \\ x^2 + y^2 = 11 - 3x \end{cases}$

Equacions Biquadrades són equacions de grau 4 i que en tenen únicament exponents de grau parell. Es resolen fent un canvi de variable, de forma que isca una equació de segon grau. Després haurem de desfer-ne el canvi fet.

- ex: resoldre $x^4–3x^2–4=0$ → fem el canvi $x^2=t$, aleshores $x^4=t^2$ → $t^2–3t–4=0$

  resolem l'equació de segon grau → t= –1 i t=4 ara haurem de desfer el canvi de variable

  com que x^2=t= –1 → x= $\sqrt{-1}$ que no té solucions reals

  com que x^2=t=4 → x= $\pm\sqrt{4}$ =±2 que són les dues solucions reals que en té.

8. Resol les següents equacions Biquadrades:

a) $7x^4-63x^2=0$ **b)** $7x^4-112=0$ **c)** $4x^4-5x^2+1=0$ **d)** $3x^4-75x^2=0$
e) $x^4-10x^2+9=0$ **f)** $x^4-81=0$ **g)** $9x^4-10x^2+1=0$ **h)** $x^4-9x^2=0$
i) $4-5x^2=-x^4$ **j)** $6+x^4=5x^2$ **k)** $x^4-3x^2=4$ **l)** $36x^4-13x^2+1=0$

- ex: resoldre $x^6–9x^3+8=0$ reduint-la a una equació de segon grau.
- ex: resoldre $x^8–14x^4–32=0$ reduint-la a una equació de segon grau.

Equacions Radicals (Irracionals) són aquelles on la incògnita està sota el signe d'una arrel.

Per resoldre-les aïllem en un dels membres de l'equació el terme radical, elevant posteriorment a la potència que convinga per poder llevar l'arrel.

- ex: resoldre $2x-\sqrt{x+1}=4$

aïllem l'arrel en el segon membre $2x-4=\sqrt{x+1}$ → elevem al quadrat $(2x-4)^2=\left(\sqrt{x+1}\right)^2$

$4x^2$–16x+16=x+1 → ordenem $4x^2$–17x+15=0 → resolem l'equació → x=3 i x=5/4

comprove la solució x=3 substituint a l'equació inicial → 2·3–4= $\sqrt{3+1}$ → 2=2

comprove la solució x=5/4 → 2·5/4= $\sqrt{5/4+1}$ → 5/2≠3/2 la qual cosa és falsa

per tan l'única solució vàlida és x=3

A les equacions Radicals, sempre s'han de comprovar els possibles resultats.

9. Obtín les possibles solucions de les equacions Radicals següents i comprova-ho:

a) $\sqrt{x}+2=x$ **b)** $\sqrt{4x+5}=x+2$ **c)** $x-\sqrt{2x-3}=1$

d) $x-\sqrt{25-x^2}=1$ **e)** $x+\sqrt{5x+10}=8$ **f)** $x+1-\sqrt{5x+1}=0$

g) $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-5}=2$ **h)** $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=-2$

APLICACIONS PRÀCTIQUES

10. Comprem al desembre un llit i una taula per un total de 2.500 € i, després de rebaixar el llit un 10% i la taula un 15%, ens trobem a les rebaixes de gener que podríem haver-ho comprat tot per 2.157'5 €. Quant costava al desembre cada moble?

11. A l'escola d'idiomes la qualificació final s'obté amb un examen escrit que suposa el 65% de la nota i un examen oral que representa el 35%. Si un alumne va traure 12 punts entre tots dos exàmens i va obtenir un 5'7 de nota final, quina puntuació va obtenir en cadascú?

12. Si afegim 7 al numerador i 2 al denominador d'una fracció, aquesta equival a la unitat; però el producte dels dos termes de la fracció inicial és 1.254. Quina era la fracció inicial?

13. En un triangle rectangle, la hipotenusa és 3 cm més gran que un dels catets, mentre que aquest és 3 cm més gran que l'altre catet. Quines són les dimensions del triangle?

14. En un examen tipus test de 20 preguntes et donen 2 punts per cada encert i te'n lleven ½ punt per cada error. Per aprovar cal obtenir al menys 20 punts, quantes preguntes s'han de contestar correctament com a mínim, per aprovar?

15. La diagonal d'un terreny rectangular fa 75 m. Sabent que aquest rectangle és semblant a un altre de costats 36 m i 48 m, quines són les dimensions del terreny?

16. Si el costat d'un quadrat augmenta 3m, la seva superfície augmenta en $75m^2$, quant mesura el seu costat?

17. Un grup d'estudiants lloga un pis per 560 €/mes. Si en foren dos més, cadascú pagaria 32 € menys. Quants estudiants són?

18. Quants litres de llet amb un 10% de matèria grassa s'han de mesclar amb una altra llet amb el 4% de m.g. per tal d'obtenir 18 litres amb un 6% de matèria grassa?

19. Una aixeta tarda el doble de temps que una altra a omplir un poal d'aigua. Si les obrim alhora, el poal s'omple en 3 minuts. Quant tardaria cadascuna per separat?

20. La suma de les dues xifres d'un nombre és 8. Si a aquest nombre li afegim 18 unitats, el nombre que resulta està format per les mateixes xifres en ordre invers. Quin és aquest nombre?