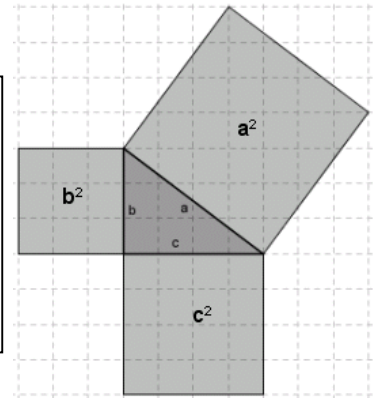


# LONGITUDES, SUPERFICIES Y VOLÚMENES

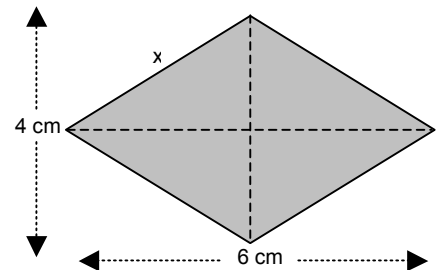
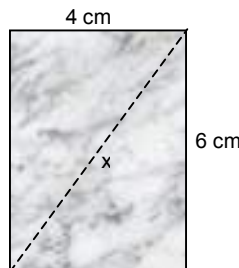
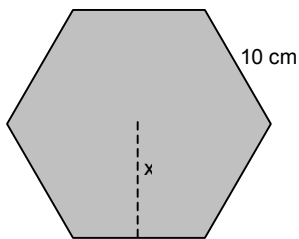
## • TEOREMA DE PITÁGORAS

Supongamos que tenemos un triángulo rectángulo de hipotenusa "a" y de catetos "b" y "c". Entonces, la superficie del cuadrado construido sobre la hipotenusa ( $a^2$ ) es igual a la suma de las superficies de los cuadrados construidos sobre los catetos ( $b^2+c^2$ ).

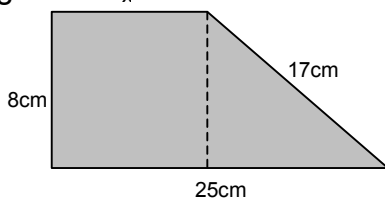
$$a^2=b^2+c^2$$



- En los triángulos rectángulos siguientes, damos los dos catetos y pedimos la hipotenusa:  
a) 37 cm y 45 cm                      b) 16 cm y 30 cm
- En los triángulos rectángulos siguientes, damos la hipotenusa y un cateto, se pide el otro:  
a) 37 cm y 45 cm                      b) 16 cm y 30 cm
- Calcula el valor de x en cada uno de los siguientes polígonos:

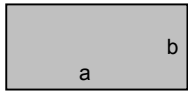


- La diagonal de un rectángulo de lados 5 cm y 12 cm es igual al lado de un cuadrado, ¿cuánto mide la diagonal de este cuadrado?
- Una escalera de 5 m de larga está apoyada sobre una pared de forma que su extremo inferior se encuentra a 1'2 m de la pared. ¿Qué altura alcanzará el extremo superior?
- Calcula x en cada uno de los trapezios siguientes y obtén la longitud de las diagonales: x



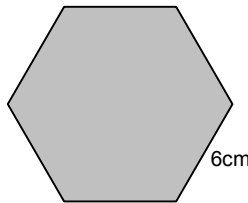
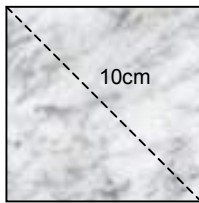
## • SUPERFICIES

- ej: El suelo de una clase rectangular tiene 20 ladrillos de ancho y 30 de largo. ¿Cuántos hay en total?

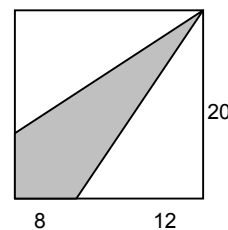
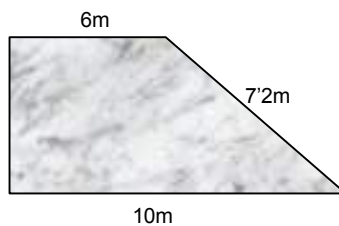
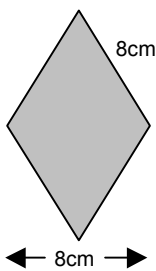


Es evidente, por tanto, que para calcular la superficie de un rectángulo hay que multiplicar las unidades que tenga de largo por las que tenga de ancho.  $S_r = a \cdot b$   
 A partir de ahí podemos deducir razonadamente el área de cualquier polígono, descomponiéndolo en triángulos o en polígonos más simples que él.

7. Calcula el perímetro y el área de estos polígonos:



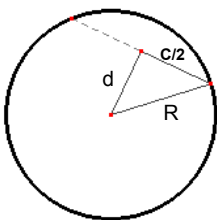
8. Calcula las superficies de las figuras coloreadas y los perímetros correspondientes:



**• CÍRCULOS Y CIRCUNFERENCIAS**

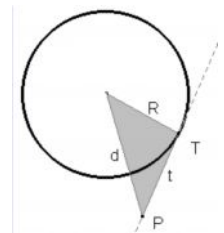
Recordemos que la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro es el número irracional  $\pi = 3.14159 \dots \rightarrow L = 2 \cdot \pi \cdot R$

Así mismo, para calcular la superficie del círculo aplicaremos la relación  $S = \pi \cdot R^2$



En cualquier circunferencia, el radio (R), la mitad de la cuerda (c/2) y la distancia (d) del centro a la cuerda, forman un triángulo rectángulo, por tanto se puede aplicar el teorema de Pitágoras  $\rightarrow R^2 = (c/2)^2 + d^2$

En cualquier circunferencia, el radio (R), la distancia (d) desde un punto (P) exterior a la circunferencia y la distancia (t) desde ese punto al punto de tangencia (T) de una recta tangente trazada desde el punto anterior, forman un triángulo rectángulo, luego se puede aplicar el teorema de Pitágoras  $\rightarrow d^2 = R^2 + t^2$



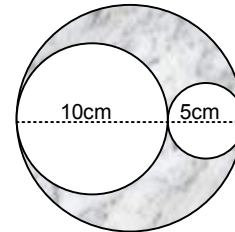
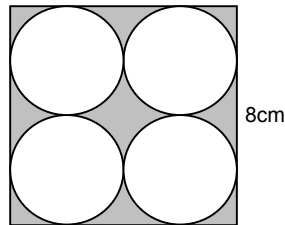
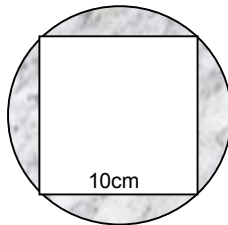
9. Una circunferencia tiene un radio de 26 cm, trazamos una recta a 10 cm del centro. Calcula la longitud de la cuerda que determina la recta en la circunferencia.

10. El segmento tangente desde un punto P a una circunferencia de centro O mide 55 cm. La distancia de P a O es 60 cm. ¿Cuál es el diámetro de la circunferencia?

1. En una circunferencia de 15 cm de radio se traza una cuerda AB a 12 cm del centro. ¿Cuál es la longitud de la citada cuerda?

11. Desde un punto P que dista 29 cm del centro de una circunferencia de radio 20 cm, trazamos una tangente que corta en el punto T a la circunferencia. Calcula la distancia del trozo de tangente PT.

12. Obtén las superficies de las figuras coloreadas y la longitud de todas las circunferencias:



13. Dibuja una circunferencia de 5cm de radio.

- Calcula el área del círculo interior a esa circunferencia.
- Encuentra el radio de otra circunferencia, concéntrica a la anterior, cuyo círculo tenga por área el doble que el primero.
- Representa gráficamente las circunferencias anteriores y colorea el área existente entre ambas circunferencias. ¿Sabes qué nombre recibe?
- Calcula el área de la corona circular correspondiente.

14. ¿Qué fracción de circunferencia supone un arco de  $30^\circ$ ? ¿Y de  $45^\circ$ ? ¿Y de  $240^\circ$ ?

15. Un jardín tiene forma de sector circular, de 10 m de radio y un ángulo de  $60^\circ$ . ¿Cuántos metros de valla se necesitarían para cercarlo? ¿Qué superficie ocupa?

16. Sabiendo que el arco correspondiente a una porción de pizza 12 cm de radio mide 9'42 cm, ¿qué ángulo corresponde a esa porción? ¿Qué superficie ocupa?

17. Una plaza tiene forma de sector circular de radio 15 m y ocupa una superficie de  $424'12 \text{ m}^2$ . ¿Qué ángulo abarca la citada plaza? Si se quisiera cerrar, ¿qué cantidad de valla haría falta?

## • POLIEDROS

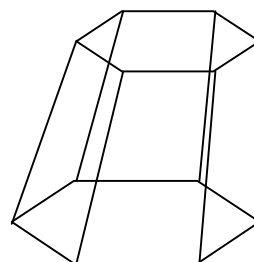
Un Poliedro es un cuerpo geométrico limitado por polígonos llamados caras. En él distinguiremos:

Caras: los polígonos que lo limitan

Aristas: los lados de las caras, en cada arista coinciden dos caras.

Vértices: son los correspondientes a los polígonos que forman las caras, en cada vértice coinciden al menos tres caras.

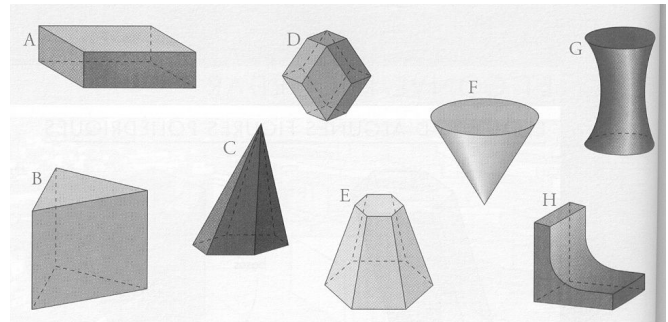
18. Señala las Caras, Aristas y Vértices:



Teorema d'Euler: "En cualquier poliedro simple (sin orificios), la suma del número de vértices y de caras es igual al número de aristas más dos". →  $V+C=A+2$

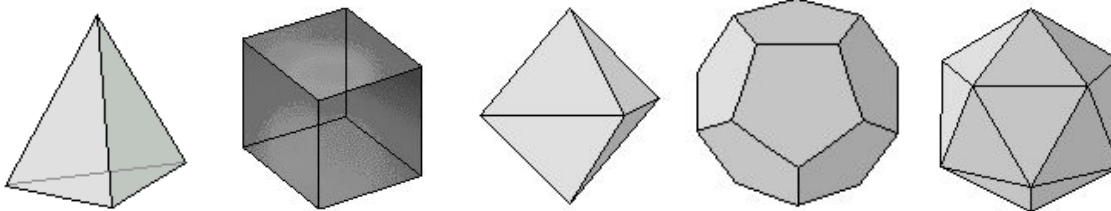
19. Entre los siguientes cuerpos geométricos, indica los que son poliedros.  
Cuenta las caras, vértices y aristas, comprueba que cumplen el Teorema de Euler.

	V	C	A	V+C	A+2



Un Poliedro es Regular cuando sus caras son polígonos regulares idénticos y en cada vértice concurren el mismo número de caras.

20. Haz una tabla, similar a la anterior, para los cinco poliedros regulares:



	V	C	A	V+C	A+2	Tipos caras	C en cada V
Tetraedro							
Hexaedro (Cubo)							
Octaedro							
Dodecaedro							
Icosaedro							

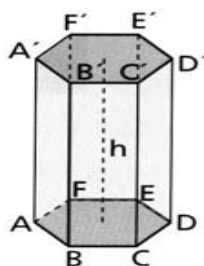
### • PRISMAS Y PIRÁMIDES

#### PRISMA

2 bases  
caras laterales rectángulos

$$S = S_{Lat} + 2 \cdot S_{Base}$$

$$V = S_{Base} \cdot h$$

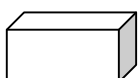
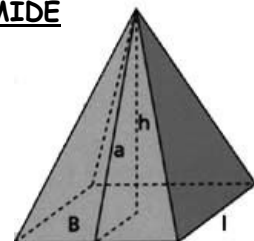


#### PIRÁMIDE

1 base + 1 vértice  
caras laterales triángulos

$$S = S_{Lat} + S_{Base}$$

$$V = 1/3 \cdot S_{Base} \cdot h$$



Un prisma donde las caras sean todas rectángulos y todas ellas perpendiculares entre sí, recibe el nombre de Ortoedro.

21. ¿Cuánto costará pintar las paredes y el fondo de una piscina de dimensiones 4 m de ancha, 6 m de larga y 3 m de honda, si la pintura cuesta 5 €/kg y con un kg pintamos 3 m<sup>2</sup>? ¿Cuál será su capacidad en litros? (RECUERDA: 1 litro = 1 dm<sup>3</sup>)

22. Calcula el precio de la tela necesaria para construir una tienda de campaña, sabiendo que el m<sup>2</sup> de tela cuesta 12 €. Calcula también el volumen de las tiendas, en los siguientes casos:

- La tienda de campaña tiene forma de tetraedro de arista 3 m.
- La tienda de campaña tiene forma de prisma recto, cuya base es un triángulo equilátero de arista 3 m y la arista lateral 4 m.



23. Dibuja y calcula el área total y el volumen de una pirámide hexagonal regular con arista de la base 8 cm y cuya arista lateral mide 10 cm. Repite el ejercicio, con las mismas medidas, pero siendo un prisma hexagonal.

24. Dibuja un prisma recto, cuya base sea un triángulo equilátero. La arista de la base mide 6 cm y la arista lateral 8 cm. Calcula sucesivamente:

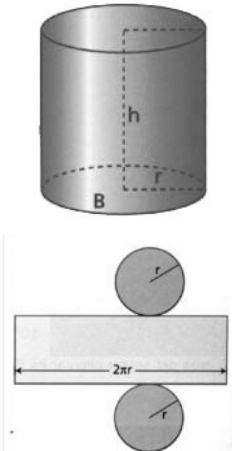

- El área de las bases.
- El área de las caras laterales.
- El área de todo el prisma.
- El volumen del prisma.

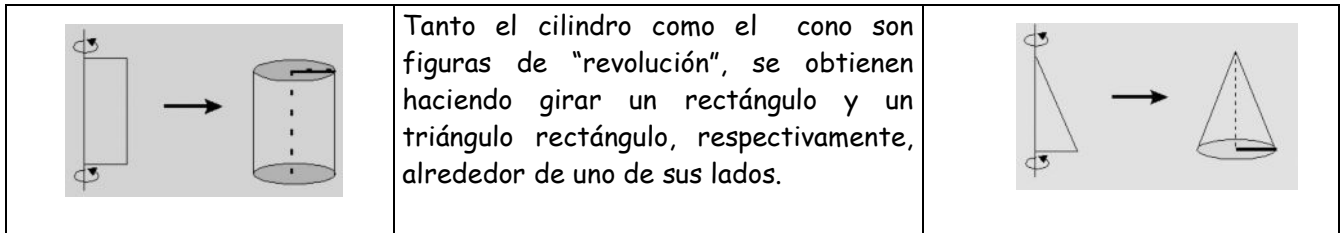


25. ¿Cuánto papel necesitaremos como mínimo para envolver una caja de 60 cm por 40 cm y por 10 cm? ¿Cuánta cinta necesitaremos para atarla, si el nudo y el lazo gastan 30 cm?

26. Se quiere construir un monumento en forma de pirámide regular de base cuadrada con una altura de 30 m. Si se han necesitado 2.000 m<sup>3</sup> de piedra, ¿podrías indicar cuál es la medida del lado de la base de la pirámide?

**• CILINDROS Y CONOS**

<u>CILINDRO</u>	<u>CONO</u>
2 bases circulares	1 base + 1 vértice
	base circular
$S = S_{Lat} + 2 \cdot S_{Base} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot R^2$	g=generatriz
$V = S_{Base} \cdot h = \pi \cdot R^2 \cdot h$	
	$S = S_{Lat} + S_{Base} = \pi \cdot R \cdot g + \pi \cdot R^2$
	$V = 1/3 \cdot S_{Base} \cdot h = 1/3 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot h$



27. Si giramos un rectángulo de dimensiones 5 cm x 3 cm alrededor de cada uno de sus lados, obtenemos dos cilindros rectos. Dibújalos y calcula el área total y el volumen.

28. Si giramos un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 3 cm y 4 cm, alrededor de cada uno, obtenemos dos conos. Dibújalos y calcúlales la superficie total y el volumen.



29. Una de las torres cilíndricas del Castillo de Olite (Navarra) tiene 5 m de diámetro, 3 m de altura y está rematado con un cono de 5 m de altura. Calcula cuánto puede costar cubrir toda la torre con una sustancia incolora que la proteja de las agresiones de la contaminación, si cada litro de esa sustancia cuesta 15 € y con un litro pintamos 3 m<sup>2</sup>.

30. Dibuja un cilindro recto. El radio de la base es de 5 cm y la altura es de 12 cm. Calcula sucesivamente:

- El área de la base.
- El área lateral.
- El área de todo el cilindro.
- El volumen del cilindro.
- Si la capacidad fuera de 1l y la altura 12 cm, calcula el radio.

31. Dibuja un cono recto. El radio de la base es de 5 cm y la altura es de 12 cm. Calcula sucesivamente:

- El área de la base.
- El área lateral.
- El área de todo el cono.
- El volumen del cono.

**• ESFERAS**

La Esfera es el cuerpo geométrico que se obtiene al hacer girar una semicircunferencia alrededor de su diámetro.

Su superficie es cuatro veces la de la mayor circunferencia inscrita en ella. →

$$S=4 \cdot \pi \cdot R^2$$

Su volumen se obtiene aplicando la siguiente relación →  $V=4/3 \cdot \pi \cdot R^3$



32. Utilizamos un segmento de 4 cm como diámetro para construir una circunferencia y, posteriormente, haciéndola girar alrededor del diámetro, construir una esfera.

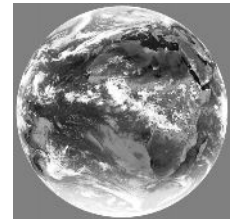
- ¿Cuál es la longitud de la circunferencia inicial?
- ¿Cuál es el área del círculo que determina?
- Calcula la superficie de la esfera creada.
- Obtén el volumen de la esfera.

33. Una bola de billar de 6 cm de diámetro se hace de un material que cuesta 42 € el  $\text{dm}^3$ , ¿cuál es su superficie?, ¿cuál será su precio?

34. El radio medio del Sol es de unos  $6'96 \cdot 10^5$  km. Calcula su superficie y su volumen.

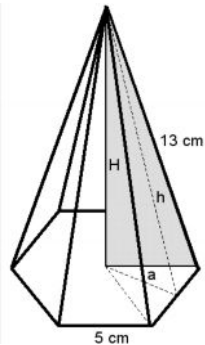
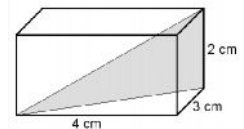
35. La Tierra tiene una superficie aproximada de 510 millones de  $\text{km}^2$ .

- Averigua cuál es su radio medio.
- ¿Cuál es la longitud aproximada del Ecuador?
- Calcula el volumen de la Tierra.



## • PITÁGORA Y THALES EN EL ESPACIO

36. En una cajita con las dimensiones de la figura, ¿cabría una aguja de 5'25 cm en posición horizontal? ¿Y en cualquier otra posición?

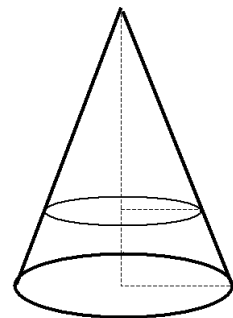
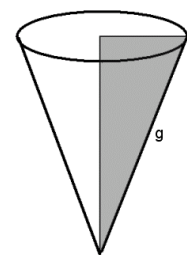


37. En una pirámide hexagonal regular, de 5 cm de arista de la base i 13 cm de arista lateral, calcula:

- La altura de la pirámide.
- La altura de las caras laterales.
- La apotema de la base.
- La superficie de la base y la superficie lateral.
- Su volumen.

38. Una copa cónica tiene 9 cm de diámetro y 10 cm de altura.

- Obtén su generatriz.
- ¿Cuál es su superficie lateral?
- ¿Qué cantidad de líquido le cabe?



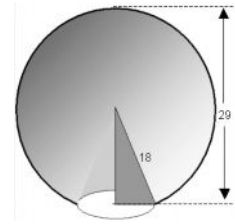
39. Cortamos un cono de 4 cm de radio y 12 cm de altura por un plano paralelo a la base y a 2 cm de distancia de ésta.

- ¿Cuál es la generatriz del cono?
- ¿Cuáles son las dimensiones (altura, radio y generatriz) del cono pequeño?
- ¿Cuáles son los volúmenes de ambos conos?
- Calcula el volumen del tronco de cono que se forma.

40. La Géode es una sala de cine que hay en la Ciudad de las Ciencias en París. La sala tiene forma de casquete esférico de 29 m de altura y la esfera correspondiente tiene un radio de 18 m.



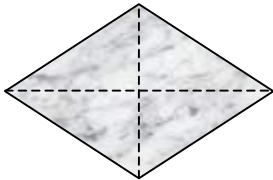
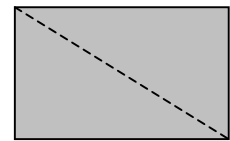
- Calcula la distancia desde el centro de la esfera al centro de la base de la Géode.
- ¿Cuál es el radio de la circunferencia base?
- Calcula la superficie de terreno ocupada por la Géode?
- ¿Cuál es la superficie y el volumen de la esfera correspondiente?



## EJERCICIOS DE REPASO

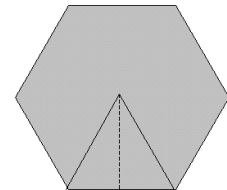
1. La diagonal de un RECTÁNGULO ES de 10 cm uno de sus lados 8 cm:

- ¿Cuál es la medida de su otro lado?
- ¿Cuál es su perímetro?
- ¿Qué superficie ocupa?



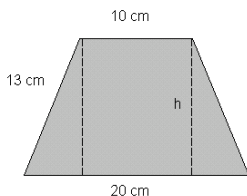
2. Un ROMBO tiene 5 m de lado y la diagonal mayor tiene una medida de 8 m:

- ¿Cuál es la medida de la otra diagonal?
- ¿Cuál es su perímetro?
- ¿Qué superficie ocupa?



3. En un HEXAGONO regular de 12 m de lado:

- ¿Cuál es la medida de su apotema?
- ¿Cuál es su perímetro?
- ¿Qué superficie ocupa?



4. En un TRAPECIO ISÓSCELES como el de la figura:

- ¿Cuál es la medida de su altura?
- ¿Cuál es su perímetro?
- ¿Qué superficie ocupa?

5. La torre Picasso de Madrid es un edificio con forma de una inmensa caja, cuyas dimensiones son 40 m, 40 m y 150 m. Imagina que está vacía por dentro.

- ¿Cuántas cajas cúbicas de 1 m de arista podrías introducir?
- Si pudieras poner estas cajas una encima de otra formando una gran columna, ¿qué altura alcanzaría?
- Imagina ahora que forramos sus fachadas con paneles de vidrio de 4 m por 5 m, ¿cuántos paneles necesitaremos?



6. Dibuja una pirámide recta de base cuadrada. La arista de la base mide 10 cm y la arista lateral 13 cm. Calcula sucesivamente:

- El área de la base.
- El área de las caras laterales.
- El área de toda de la pirámide.
- El volumen de la pirámide.

7. Dibuja los cuerpos geométricos siguientes y calcula el área y el volumen correspondiente:

- Prisma de altura 24 cm, cuya base es un rombo de diagonales 18 y 12 cm.
- Pirámide de altura 25 cm y base cuadrada de lado 9 cm.
- Cilindro de altura 17 cm, cuya circunferencia básica mide 44 cm.
- Esfera inscrita en un cilindro de altura 1 m.