

EXPRESIONES ALGEBRAICAS Y POLINOMIOS

1. Convierte cada una de las siguientes frases en una expresión algebraica:

- Tengo 5 más que la mitad que tú.
- Un número x dividido por 3 es el doble que otro número y .
- El triple de un número menos 7, elevado al cuadrado, da 4.
- La mitad de un número más 2 es igual al cuadrado de este número menos 4.
- El precio de un artículo es el que marca su etiqueta menos un 20% de descuento.
- El volumen de una esfera es cuatro terceras partes del producto del número π multiplicado por el cubo de su radio.
- La superficie de un círculo es igual al número π por el cuadrado de su radio.
- El volumen de un cono es la tercera parte del área de la base por la altura.
- La edad de Ángel dentro de 5 años será el cuádruplo de la que tiene ahora María.

Una expresión algebraica es aquella en la que intervienen números y letras relacionados mediante cualquier tipo de operación.

• ej: $\sqrt[3]{x^2 + 2}$ $\frac{(-3x + h)^2}{5}$

Un monomio es una expresión algebraica en donde las únicas operaciones utilizadas son el producto y la potencia de las variables. ej: x^3 , $-2x^4$, $3y^2$, x^2y^6

Un polinomio está formado por la suma o resta de varios monomios. ej: $3x - 2x^4$, $5x^{18} + 3y^5 - 10$

Los números que multiplican a las variables reciben el nombre de coeficientes.

En el último ejemplo anterior $5x^{18} + 3y^5 - 10$ sus coeficientes son 5, 3 y -10.

Cada uno de los monomios que forma el polinomio se llama término del polinomio. En el ejemplo anterior, el polinomio $5x^{18} + 3y^5 - 10$ tiene tres términos.

Grado del polinomio es el mayor de los exponentes de cada término. En $5x^{18} + 3y^5 - 10$ el grado es 18.

Término fundamental es aquel donde está el grado del polinomio. En el caso anterior $5x^{18}$.

Coficiente fundamental es el correspondiente al término fundamental. En el anterior ejemplo, 5.

Término independiente es el del término de grado cero, aquel que no tiene incógnita asociada. En el ejemplo que estamos manejando, -10.

2. Contesta a las siguientes cuestiones:

- Escribe el polinomio cero de grado 3.
- Escribe el polinomio opuesto de $P(x) = -15x^3 + 2x^2 - 5$
- Dado el polinomio $Q(x) = 7x^3 - 2x^4 - 6 + 9x$
 - ¿De qué grado es?
 - ¿Cuál es el término de segundo grado?
 - ¿Cuál es el término de tercer grado?
 - ¿Cuál es su término independiente?, ¿de qué grado es este término?
 - Ordénalo
 - ¿Cuál es su coeficiente fundamental?
 - ¿Cuál es el coeficiente del término de primer grado?
 - ¿Cuál es el término principal?

3. Rellena la siguiente tabla:

	$-4x^3+6x^2-x^5+7$	$2x^4+3x^2y-x$	$6-2x^7+7x^5-5x^2-x^4$
Número de términos			
Grado			
Término principal			
Coeficiente fundamental			
Término independiente			
Término de 3 ^r grado			
Coeficiente del término de 5 ^o grado			

Para sumar o restar polinomios $P(x) \pm Q(x)$, sumaremos o restaremos los monomios correspondientes que sean equivalentes (mismo grado y misma variable)

• ej: $7x^4+9x^4=16x^4$ $10x^7-3x^7=7x^7$ $2x^5-x^5+10x^6+2x^5-x^6=3x^5+9x^6$

Para multiplicar un polinomio por una constante $k \cdot P(x)$, multiplicaremos todos sus coeficientes por dicha constante.

• ej: $4 \cdot (-5x^3+2x^4+x-8) = -20x^3+8x^4+4x-32$

Para multiplicar dos polinomios $P(x) \cdot Q(x)$, multiplicaremos todos los términos de uno de ellos por todos los términos del otro.

• ej: $5x^7 \cdot 3x^2 = 15x^9$ $-2x^4 \cdot (8x^6 - 9x^2) = -16x^{10} + 18x^6$
 $(3-5x^3) \cdot (4x^2+2x) = 12x^2+6x-20x^5-10x^4$

4. Haz las sumas de los monomios siguientes:

$5x-3x+4x+7x-11x+x =$ $3x^2y-5x^2y+2x^2y+x^2y =$ $7x^3-11x^3+3y^3-y^3+2y^3 =$

5. Dados los polinomios $P(x) = x^3 + 3x + 1$, $Q(x) = 2x^2 - 2x$ y $R(x) = -2x^3 + 13x$, efectúa las siguientes operaciones: $P(x) + Q(x)$ $P(x) + R(x)$ $Q(x) - R(x)$ $3Q(x)$

6. Dados los polinomios $P(x) = x^3 + 1$, $Q(x) = 2x + 1$ y $R(x) = -2x^3 + 1$, calcula los siguientes productos: $P(x) \cdot Q(x)$ $Q(x) \cdot R(x)$ $P(x) \cdot R(x)$

7. Calcula mentalmente estas divisiones de monomios:

$12x^4 : 3x^3 =$ $144x^6 : 24x^3 =$ $72x^7 : 12x^5 =$ $18x^9 : 6x^3 =$

8. Si $P(x) = x^4 - 3x^3 + 5x + 3$ y $Q(x) = 5x^3 + 3x^2 - 11$, calcula $P(x) + Q(x)$ y $P(x) - Q(x)$.

9. Obtén los siguientes productos:

a) $x(2x+y+1)$ b) $2a^2(3a^2+5a^3)$ c) $ab(a+b)$ d) $5(3x^2+7x+11)$
e) $x^2y(x+y+1)$ f) $5xy^2(2x+3y)$ g) $-2x(3x^2-5x+8)$ h) $3a^2b^3(a-b+1)$

10. Haz las operaciones indicadas y simplifica la expresión que resulta:

a) $3(x^3-5x+7)-(2x^3+6x^2+11x+4)$ b) $2x(3x^2-5x+1)+5(3x^2-5x+1)-7x$
c) $8 \cdot \left[\frac{3(x+2)}{4} + \frac{3x+5}{2} - 3 \right]$ d) $6 \cdot \left[\frac{3(x-5)}{2} - \frac{y-x}{2} - \frac{y}{6} - 3 \right]$
e) $\frac{-3(x-y-4)}{7} - 10 - \frac{y-1}{3}$ f) $2(x-1)+3(y+4) - \frac{2(3x+y)}{5} + 9$

11. Extrae factor común en las siguientes expresiones:

a) $3x^2+6x$ b) a^4-3a^2 c) $(x+1)a+(x+1)b-c(x+1)$

$$d) \frac{x}{2}(x+5) - \frac{x}{2}$$

$$e) 6x^2y^4 - 3x^2y^3 + \frac{3}{2}x^5y^4$$

$$f) x(x^2y+y^2x)+7(x^2y+y^2x)$$

$$g) \frac{3}{x} - (x^2 + 1)x$$

$$h) \frac{x^2 + 1}{3} - \frac{x^2 + 1}{5}$$

$$i) \frac{xy}{5} - 3xy(3x+1)$$

12.

- Desarrolla $(x+1)^2$ como $(x+1) \cdot (x+1) =$
- Desarrolla $(x-3)^2$ como $(x-3) \cdot (x-3) =$
- Desarrolla $(x+1)(x-1) =$

Los ejercicios anteriores podían haber sido resueltos de manera más rápida y cómoda aplicando las siguientes expresiones:

- $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2 \rightarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2 \rightarrow (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

A estas relaciones se les llama expresiones notables.

13. Desarrolla las siguientes expresiones:

$$a) (x+1)^2$$

$$b) (x-3)^2$$

$$c) (x+1)(x-1)$$

$$d) (2x-1)^2$$

$$e) (x+3)(x-3)$$

$$f) (x+3)^2$$

$$g) (x^2+2)(x^2-2)$$

$$h) (x-3)(x-3)$$

$$i) (5x+2)^2$$

$$j) (2a-3)^2$$

$$k) (x-2)(x+2)$$

$$l) (3x-4)(3x+4)$$

$$m) (-x+2)^2$$

$$n) (5x+2y)^2$$

$$o) (2x-5)(2x+5)$$

$$p) (5b-3)(5b+3)$$

$$q) (-x+5)(-x-5)$$

$$r) (7x+1)^2$$

14. Expresa en forma de cuadrado perfecto o producto de binomios:

$$a) x^2 - 8x + 16$$

$$b) x^2 + 4 + 4x$$

$$c) 4 - x^2$$

$$d) 16y^2 - x^2$$

$$e) 4x^2 + 9 + 12x$$

$$f) 9x^2 + 25 - 30x$$

$$g) \frac{x^2}{4} + x + 1$$

$$h) 49x^2 - x^8$$

$$i) 2x^2 - 1$$

$$j) 4x^6 - 100$$

15. Opera y simplifica las siguientes expresiones:

$$a) 9 \left[x + \frac{2x-3}{9} + \frac{x-1}{3} - \frac{3-4x}{9} \right]$$

$$b) 15 \left[\frac{x}{15} + x - \frac{2x}{5} - 10 \right]$$

$$c) 8 \left[\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} - \frac{3x}{4} - \frac{1}{4} \right]$$

$$d) 12 \left[\frac{3(x+2)}{4} + \frac{3x+5}{2} - \frac{5(4x+1)}{6} + \frac{25}{12} \right]$$

$$e) 5 \left[5 - \frac{6x-4}{5} - (x-3) \right]$$

$$f) 18 \left[\frac{x}{3} - \frac{x-1}{2} - \frac{x-13}{9} \right]$$

$$g) 8 \left[\frac{(2x-4)^2}{8} - \frac{x(x+1)}{2} - 5 \right]$$

$$h) 20 \left[\frac{(x+2)^2}{5} - \frac{x^2-9}{4} + \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{1}{5} \right]$$

16. Escribe la expresión algebraica correspondiente a las siguientes afirmaciones:

- A mi edad le quitamos 10 años.
- El doble de un número, menos su cuadrado.

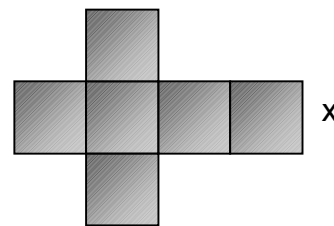
- Un múltiplo de 3 menos 1.
- Un múltiplo de 3, menos 1.
- Calculamos el 20% del precio de unos zapatos.
- Cuatro veces un número, menos sus dos tercios.
- El precio de un pantalón aumentado en un 15%.
- Un número impar.

17. Si denominamos x el ancho de la pizarra, expresa su altura en cada caso:

- Es la mitad de la anchura.
- Es 20 cm menos que la anchura.
- Es tres cuartas partes de la anchura.
- Es un 20% menor que la anchura.

18. Expresa con un monomio:

- El perímetro de la figura y su área.
- El volumen del cubo que se puede formar con ella.



19. Traduce al lenguaje algebraico las expresiones:

- | | |
|--|--|
| • Los tres quintos de un número menos 1. | • Los tres quintos de un número, menos 1. |
| • La suma de tres números consecutivos. | • Un múltiplo de 3 más el doble de éste. |
| • La suma de un número y de su cuadrado. | • El producto de un número entero por el número siguiente. |

20. Opera y simplifica:

- | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|---|
| a) $(2x)^3 - (3x)^2x - 5x^2(-3x+1)$ | b) $(2x^2-x+3)(x-3)$ | c) $(-x^2+3x-5)(2x-1)$ |
| d) $(x^2-x-1)(x-2)$ | e) $(3x^3-5x^2+6)(2x+1)$ | f) $(2x^2+x-3)(x^2-2)$ |
| g) $(x+7)^2$ | h) $(x-11)^2$ | i) $(2x+1)^2$ |
| k) $(3x+4)^2$ | l) $(3-4x)(3+4x)$ | m) $\left(\frac{2}{5}x - 5\right)^2$ |
| | | n) $\left(\frac{1}{3} - 2x^2\right)\left(\frac{1}{3} + 2x^2\right)$ |

21. Considera los polinomios $P(x)=x^4-3x^2+5x-1$, $Q(x)=2x^2-6x+3$ y $R(x)=2x^4+x^3-x-4$.
 Obtén $P(x)+Q(x)$, $P(x)+R(x)$, $P(x)+Q(x)+R(x)$, $P(x)-Q(x)$ y $R(x)-Q(x)$.

22. Por dejar un equipaje en consigna cobran 9 €, y por cada día que pasa sin que se recoja, 2 € más. Describe esta situación mediante una expresión algebraica.

- ¿Cuánto tendrá que pagar un viajero que tarde 3 días en recoger su equipaje?
- ¿Y otro que tarde 5 días?
- Si hemos pagado 23 €, ¿cuántos días hemos dejado la maleta en consigna?
- Haz una pequeña tabla de valores y representa gráficamente la relación anterior.

23. Calcula el valor numérico de los monomios siguientes para $x=3$, $y=-2$ y $z=5$.

- | | | | | | |
|--------------|-----------|------------|------------------|---------|-------------|
| a) $-6x^2yz$ | b) $3x^2$ | c) $4xy^2$ | d) $-5x^2y^2z^2$ | e) yz | f) $-2xz^3$ |
|--------------|-----------|------------|------------------|---------|-------------|

