

1. Qualifica de quasi segur, probable, poc probable o quasi impossible, cadascun dels següents esdeveniments:

- Encertar la Loteria Primitiva amb una única aposta.
- Obtenir doble 6 en llançar dos daus.
- Que un equip de futbol de 1a divisió guanyi algun partit.
- Que en Brussel·les ploiga al menys vint dies durant un any.

2. Uns tafurs comenten algunes jugades de les seves partides:

- Vaig tenir una vesprada amb molta sort. Vaig tirar el dau 180 vegades i va eixir el 6 en 84 ocasions – diu un.

- Doncs jo tinc comptabilitzat que, en els tres últims mesos, el nombre de vegades que ha eixit el 6 supera al nombre de vegades que ha eixit l'1 en 230 – diu altre.

- En les meves partides surt tantes vegades el 6 com l'1, com a la resta de les cares del dau. I, ja que ho porte ben comptat, cada vegada que aposte ho faig pel nombre que menys vegades ha sortit. D'aquesta manera guanyo gairebé sempre – diu el tercer.

Diuen la veritat? Menteixen? Juguen amb daus trucats? O, en tot cas, en les coses de l'atzar no hi ha manera d'assegurar res...

Es possible donar lleis que regulen l'atzar?

3. Jugues amb un amic a llançar un dau. Tu guanyes si surt 6 i el teu amic guanya si surt el 1, 2, 3, 4 ó 5.

Si tu apostares un euro, et semblaria bé que el teu amic apostara també un euro? Quant creus que hauria d'apostar?

Quantes vegades hauria de llançar un dau per obtenir un 6?

EXPERIMENT ALEATORI és aquell on els seus resultats depenen de l'atzar.

- ex: llançar una moneda, el nombre de fills d'una família, ...

ESPAI MOSTRAL és el format per tots els resultats possibles d'un experiment aleatori, es designa (E).

- ex: en llançar dues monedes i anotar els resultats obtinguts, $E=\{CC, CX, XC, XX\}$

4. Cita al menys 5 exemples d'esdeveniments que depenguen de l'atzar i 5 que no ho facen.

ESDEVENIMENT ALEATORI és cadascun dels subconjunts de l'espai mostral.

ESPAI d'ESDEVENIMENTS (S) és conjunt de tots els subconjunts d'E.

Tipus d'Esdeveniments:

- Elementals, formats per un sol punt mostral
- Compostos, formats per diversos punts mostrals
- Segur (cert), el que sempre es realitza (E)
- Impossible, el que mai es realitza (\emptyset)

- ex: en llançar un dau per fer travesses i anotar el símbol obtingut ...

$E=\{1, X, 2\}$

Esdeveniments elementals: $\{1\}, \{X\}, \{2\}$

Esdeveniment segur: $\{1, X, 2\}$

$S=\{\emptyset, \{1\}, \{X\}, \{2\}, \{1, X\}, \{1, 2\}, \{X, 2\}, \{1, X, 2\}\}$

Esdeveniments compostos: $A=\{1, X\}$ $B=\{X, 2\}$

Esdeveniment impossible: $\{\emptyset\}$

5. En els següents experiments aleatoris, determina l'espai mostral (E) i posa un parell d'exemples d'esdeveniments:

A={llançar dues monedes i comptar el nombre de cares}.

B={extraure una carta d'una baralla espanyola i anotar què ix}.

C={llançar dos daus i anotar la suma de punts que isquen}

6. En cadascun dels tres experiments anteriors, indicar quin és l'esdeveniment segur, l'esdeveniment impossible, citar alguns esdeveniments simples i altres de compostos.

7. En una urna tenim 10 boles de colors numerades:

- Una grisa, la número 1
- Dues verdes, la número 3 i 6
- Tres blaves, la número 2, 8 i 9
- Quatre roges, la número 4, 5, 7 i 10

Escriu una experiència aleatòria, descriu l'espai mostral i cinc esdeveniments.

FREQÜÈNCIA ABSOLUTA d'un esdeveniment A, $f(A)$, és el nombre de vegades que es repeteix l'esdeveniment A en repetir n vegades l'experiment.

FREQÜÈNCIA RELATIVA d'un esdeveniment A, $f_r(A)$, és el quocient entre la seva freqüència absoluta i el nombre total de proves realitzades. $f_r(A) = \frac{f(A)}{n}$



Propietats de la freqüència relativa: $0 \leq f_r(A) \leq 1$ $f_r(E)=1$ $f_r(\emptyset)=0$

8. Llança una moneda 10 vegades i anota el que ha eixit.



- Quina és la freqüència absoluta i relativa en cadascun dels dos casos possibles?
- Canvien aquestes freqüències si anem afegint dades d'altres companys? Com?
- Què ocurriria en el cas que el nombre de llançaments s'apropara a infinit?
- Quina freqüència relativa hagueres donat a cada esdeveniment abans de fer aquest l'experiment?

9. Llança una xinxeta 100 vegades i anota el nombre de vegades que ix cada esdeveniment.

- Quina és la freqüència absoluta i relativa en cadascun dels dos casos possibles?



	N=100	
	n	%
		
		

- Com canvien aquestes freqüències si anem afegint dades d'altres companys?

	N=100		N=200		N=500		N=800		N=1000		N=		N=		N=	
	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%	n	%
																
																

- Què ocurriria en el cas que el nombre de llançaments cresquera indefinidament?

Observa la tendència dels PERCENTATGES obtinguts:

Llançaments (→)	100	200	500	800	1000				
$f_r(A)$ (↓)									
									
									

➔

∞

- Si un experiment el repetim sota similars condicions indefinidament, la freqüència relativa tendeix a estabilitzar-se.

La **PROBABILITAT** mesura fins a quin punt es pot esperar que ocorregui un esdeveniment. **PROBABILITAT** d'un esdeveniment és el nombre fins al qual tendeix a apropar-se la seva freqüència relativa quan el nombre d'experiències s'apropa a infinit. $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_r(A)$

Llei de LAPLACE: $P(A) = \frac{\text{nombre de casos favorables de A}}{\text{nombre de casos possibles de E}}$

- ex: Quina és la probabilitat d'obtenir un nombre parell en llançar un dau?
 $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{\text{n}^\circ \text{ parell}\} = \{2, 4, 6\} \rightarrow P(A) = 3/6 = 0'5$

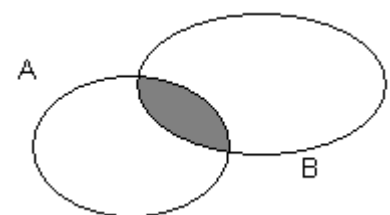
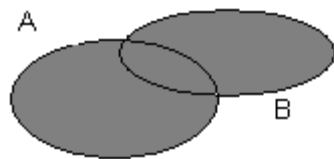
Propietats de la Probabilitat:

$0 \leq P(A) \leq 1$ $P(E) = 1$ $P(\emptyset) = 0$ $P(A') = 1 - P(A)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 Si A i B incompatibles $\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

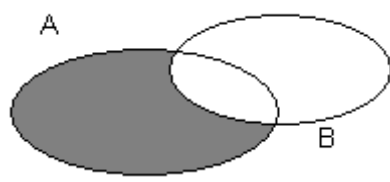
- ex: en extraure una carta d'una baralla espanyola, quina probabilitat hi ha de què siga "un Or o un As"?
 $A = \{\text{Or}\} \rightarrow P(A) = 10/40 = 0'25$ $B = \{\text{As}\} \rightarrow P(B) = 4/40 = 0'1$
 $A \cup B = \{\text{Or o As}\} \rightarrow P(A \cup B) = 0'25 + 0'1 - 0'025 = 0'325$ $A \cap B = \{\text{Oro y As}\} \rightarrow P(A \cap B) = 1/40 = 0'025$

OPERACIONS AMB ESDEVENIMENTS:

UNIÓ ($A \cup B$) de dos esdeveniments A i B és el que es produeix quan es realitza qualsevol de tos dos esdeveniments, A o B. **INTERSECCIÓ ($A \cap B$)** de dos esdeveniments A i B és el que es produeix quan es realitzen simultàniament A i B.



DIFERÈNCIA ($A - B$) de dos esdeveniments A i B és el que es produeix en verificar-se A però no fer-ho B. $\Rightarrow A - B = A - (A \cap B)$ **CONTRARI (A')** d'un esdeveniment A és es que es verifica sempre que no ho faça l'esdeveniment A. $\Rightarrow A' = E - A$



Dos esdeveniments A i B són **COMPATIBLES** en el cas de què $A \cap B \neq \emptyset$
 Dos esdeveniments A i B són **INCOMPATIBLES** si $A \cap B = \emptyset$. Impossibles a la vegada.

10. Una borsa conté 10 boles numerades de l'1 al 10, extraiem una bola:

a) Quin n'és l'espai mostral?

b) Considerem els esdeveniments A ="obtenir nombre primer" i B ="obtenir múltiple de 3".

Escriu els esdeveniments A , B , A' , B' , $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup A'$, $A \cap A'$.

11. Quina és la probabilitat dels següents esdeveniments:

A ={extraure el 3 de copes en una baralla espanyola}

B ={triar a l'atzar el 6 doble entre les fitxes del dòmino}

12. S'extrau una carta d'una baralla espanyola, calcula la probabilitat dels esdeveniments:

A ={figura}

B ={bastos o espases}

C ={rei o or}

13. D'una borsa que té 10 boles numerades del 0 al 9, se n'extrau una a l'atzar, obtén les probabilitats dels esdeveniments següents:

A ={nombre imparell}

B ={> 5}

C ={diferent de 7}

D ={nombre parell}

E ={múltiple de 3}

F ={≤4}

14. S'extrau una bola d'una bossa que conté 4 boles blanques, 5 de grogues, 5 de blaves i 3 de verdes. Obtén la probabilitat dels esdeveniments:

A ={roja}

B ={no siga blanca}

EXPERIMENTS COMPOSTOS són els formats per diversos experiments simples.

• ex: llançar un dau i una moneda

La probabilitat d'Experiments Compostos és el producte de les probabilitats dels experiments simples dels qual està format.

• ex: en llançar una moneda i un dau, quina probabilitat hi ha d'obtenir "cara i un 4"?

$$P(C, 4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = 0,0833$$

15. Es llancen dos daus i s'anota la suma dels punts obtinguts, calcula la probabilitat dels següents esdeveniments:

A ={4}

B ={2}

C ={7}

D ={11}

E ={>10}

F ={≤4}

16. Hem llançat 200 vegades una moneda, obtenint cara en 140 llançaments.

Calcula la probabilitat «a priori» i la probabilitat «a posteriori» per a l'obtenció d'una cara. Creus que la moneda anterior és defectuosa? Perquè?

17. Lluís i Carme juguen a cara o creu amb una moneda perfecta, el joc consisteix en tirar tres vegades la moneda. Si surt cara en la primera tirada, guanya Lluís, si no, es torna a tirar dues vegades més, i si en les dues surt cara també guanya Lluís. En la resta de casos guanya Carme. Fes un diagrama d'arbre per ajudar-te.

Qui et sembla que té més probabilitats de guanyar?

18. Tenim una ruleta dividida en vuit sectors iguals numerats de l'1 al 8, fem girar una fletxa i anotem el nombre on s'atura. Calcula les probabilitats dels esdeveniments següents:

A ={nombre parell}

B ={nombre primer}

C ={≥3}

D ={≠7}

19. Extraiem una fitxa d'un dòmino i calculem la probabilitat que:

$A = \{\text{la suma de punts siga igual a 6}\}$ $B = \{\text{la suma de punts siga menor que 4}\}$

$C = \{\text{siga una fitxa doble}\}$

20. Escrivim cadascuna de les lletres de la paraula MUSICA en una fitxa i les posem en una bossa. N'extraiem una lletra a l'atzar.

a) Escriu els esdeveniments elementals d'aquest experiment aleatori. Tenen tots la mateixa probabilitat?

b) Escriu l'esdeveniment "obtenir vocal" i calcula'n la probabilitat corresponent.

c) Si la paraula triada fóra DÒMINO, com respondries als apartats anteriors.

21. En un sorteig de loteria observem la xifra en què acaba la "grossa".

Quin n'és l'espai mostral?

Escriu els esdeveniments $A = \{>5\}$ i $B = \{\text{parell}\}$

Calcula els esdeveniments: A' , B' , $A \cup B$, $A \cap B$ i $A' \cap B'$

22. En la loteria primitiva s'extrauen boles numerades de l'1 al 49, calcula la probabilitat que la primera bola extreta siga:

$A = \{\text{nombre d'una sola xifra}\}$

$B = \{\text{múltiple de 7}\}$

$C = \{\text{major que 25}\}$

Esdeveniments Independents: quan el resultat de cap d'ells depèn de l'altre.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

• ex: en extraure dues cartes d'una baralla, tornant cadascuna després de cada extracció, quina és la

probabilitat d'extraure "dos asos"? $P(\text{As}, \text{As}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{40} = 0'01$

Esdeveniments Dependents: quan el resultat d'un d'ells depèn de l'altre .

Probabilitat Condicionada: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ \rightarrow $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$

• ex: en extraure dues cartes d'una baralla sense devolució, quina és la probabilitat d'extraure "dos asos"?

$$P(\text{As}, \text{As}) = \frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} = 0'0077$$

23. Dos jugadors de pilota juguen un partit a 21 punts (guanya el primer que arribe a 21). Quasi al final d'un partit, quan un jugador, Pau, porta 20 punts, l'altre jugador, Jaume, en porta 18. Tenint en compte els diferents resultats que es van obtenint, calcula:

Quina és la probabilitat de què guanye Pau?, i de què guanye Jaume?

Fes un diagrama d'arbre que t'ajude.

24. Extraus una carta d'una baralla espanyola, la mires i la tornes al muntó, fent a continuació una segona extracció. Quina és la probabilitat de que n'hagen segut ...?

$A = \{\text{dos reis}\}$

$B = \{\text{la primera un or i la segona una figura}\}$

$C = \{\text{l'as d'ors la primera i or la segona carta}\}$ $D = \{\text{figura la primera i rei la segona}\}$

25. En llançar tres monedes, quina és la probabilitat d'obtenir tres cares? I d'obtenir alguna cara? I de no obtenir-ne cap?

26. Llances dues monedes i un dau, calcula la probabilitat d'obtenir dues cares i un cinc.

- En la urna B hi ha 4 boles blanques, 1 blava i 1 negra.
- En la urna C hi ha 5 boles blanques i 1 verda.

Calcula la probabilitat d'obtenir-ne bola blanca en triar a l'atzar una de les urnes i extraure'n una bola. Quina seria la probabilitat d'obtenir-ne bola blava?

37. Després de llançar moltes vegades un model de xinxetes, sabem que la probabilitat que caiga amb la punta cap amunt és 0'38. Si en tirem dues, quina serà la probabilitat que les dues caiguen: a) cap amunt b) cap a baix c) de manera diferent

38. Xavier té al seu portamonedes 4 de cinc cèntims, 3 de vint i 2 d'un euro. En trau dues monedes a l'atzar. Quina és la probabilitat dels següents esdeveniments:

- a) les dues de cinc cèntims b) cap d'un euro c) que sumen 1'20 €

39. Un jugador de bàsquet sol encertar el 75% dels seus llançaments des del punt de tirs lliures. Si encerta el primer tir, pot tornar a tirar. Calcula la probabilitat que ...

- a) faça dos punts b) faça un punt c) no en faça cap

40. Extraïem dues boles d'una urna que conté quatre boles blaves i tres roges, obtín la probabilitat que ...

- a) totes dues siguin del mateix color b) siguin de diferent color
c) la segona siga blava d) la segona siga roja

41. La probabilitat de néixer nena és 0'54, una família amb tres fills, quina probabilitat té que siguin:

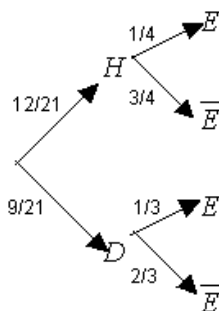
- a) tres nens b) tres nenes c) dos nenes i un nen d) al menys una nena

42. En una reunió hi ha 21 persones, de les quals 12 són homes; un quart dels quals són espanyols, igual que un terç de les dones. Triada una persona a l'atzar, obtín la probabilitat que siga:

a) de nacionalitat espanyola: $P(E)$

si fem un diagrama d'arbre:

Prendrem les dues branques de l'arbre que ens fan arribar a l'esdeveniment desitjat.



$$\begin{aligned}
 P(E) &= P[(H) \cap (E/H) \cup (D) \cap (E/D)] = \\
 &= P[(H) \cap (E/H)] + P[(D) \cap (E/D)] = \\
 &= P(H) \cdot P(E/H) + P(D) \cdot P(E/D) = \\
 &= \frac{12}{21} \cdot \frac{1}{4} + \frac{9}{21} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} = 0'25
 \end{aligned}$$

b) un home, sabent que és d'Espanya: $P(H/E)$

fent servir la relació de la probabilitat condicionada $P(H/E) = \frac{P(H \cap E)}{P(E)}$

el denominador ja està calculat en l'apartat anterior, mentre que el numerador el podem calcular a partir de la probabilitat condicionada contrària, que sí coneixem $\rightarrow P(E/H) = \frac{P(E \cap H)}{P(H)} \rightarrow$

$$\text{si observem el diagrama d'arbre anterior} \Rightarrow P(H \cap E) = P(H) \cdot P(E/H) = \frac{12}{21} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{7} = 0'143 \Rightarrow$$

$$P(H/E) = \frac{0'143}{0'25} = 0'57$$

43. Tenim tres urnes, amb sis boles de colors, cadascuna d'elles.

- En la urna A hi ha 3 boles blanques, 1 negra, 1 verda i 1 roja.
- En la urna B hi ha 4 boles blanques, 1 negra i 1 groga.
- En la urna C hi ha 5 boles blanques i 1 verda.

- a) Si extraïem una bola i resulta que és blanca, quina probabilitat hi ha que haja segut extreta de la urna A?
- b) Si extraïem una bola i resulta que és negra, quina probabilitat hi ha que haja segut extreta de la urna B?

44. En una empresa hi ha 150 treballadors. Se sap que: 60 son homes, hi ha 5 homes vidus, 52 dones casades i en total, 69 persones són solteres i 16 vídues. Anomena amb la seva inicial cada esdeveniment i ...

a) Confecciona una taula de doble entrada

- Es tria una persona a l'atzar en l' empresa. Calcula les probabilitats següents:

b) $P(H)$, $P(D)$, $P(S)$, $P(C)$, $P(V)$

c) Siga una dona casada

d) Sabem que la persona triada és dona, quina és la probabilitat que estiga casada?

e) Sabem que la persona elegida està casada, quina és la probabilitat que es tracte d'una dona?

45. En un institut els alumnes d'ESO es distribueixen de la següent manera: hi ha un 35% d'alumnes en 1r curs, un 25% en 2n, un 22% en 3r i la resta en 4t curs. El percentatge d'aprovat en cada curs és: 80% en primer, 75% en segon, 60% en tercer i 55% en quart. Triem un alumne a l'atzar i volem calcular la probabilitat que:

a) estiga aprovat

b) siga de 3r curs, sabent que està suspès

c) Si l'institut té 840 alumne a l'ESO, quants s'espera que hagen aprovat?

46. El 55% de les bombetes que tenen a una ferreteria són de fabricació nacional; mentre que l'1 % de les fabricades ací són defectuoses, l'1'5 % de les fabricades a l'estranger ho són. Si agafem a l'atzar una d'elles, quina és la probabilitat que:

a) tinga algun defecte

b) siga estrangera, si no té cap defecte

c) si hi hagueren 3000 bombetes, quantes s'esperen que no tinguin defectes?

47. S'ha fet una enquesta a 75 alumnes d'un institut i s'han obtingut els següents resultats:

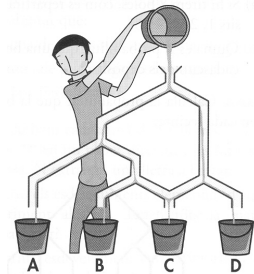
- A 48 els agrada el bàsquet
- A 45 els agrada el futbol
- A 58 els agrada el ciclisme
- A 28 els agrada el bàsquet i el futbol
- A 37 els agrada el futbol i el ciclisme
- A 40 els agrada el bàsquet i el ciclisme
- A 25 els agraden els tres esports

Fes un diagrama amb les dades anteriors i obtín a quants d'ells els agrada:

- a) Només bàsquet i futbol
- b) Únicament futbol i ciclisme
- c) Únicament bàsquet i ciclisme
- d) Només bàsquet
- e) Només futbol
- f) Únicament ciclisme

Calcula la probabilitat de cadascun dels esdeveniments anterior, si triem un alumne a l'atzar.

48. Si el cub conté 4 litres d'aigua, quina quantitat s'espera que caiga en cada cub?



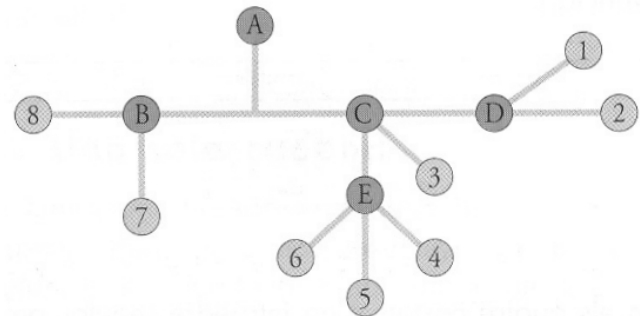
49. En un lloc se sap que si avui fa sol, la probabilitat que demà també en faça és $\frac{4}{5}$, però si avui està núvol, la probabilitat que demà també ho estiga és $\frac{2}{3}$.

Si avui és divendres i fa sol, quina és la probabilitat que diumenge també faça sol?

Quina seria la probabilitat que dissabte i diumenge no fera el mateix temps?

I que estiguera núvol tots dos dies del cap de setmana?

50. Aquest és un pla de la xarxa de tren de rodalies d'una ciutat. En cada nus és igual de probable que el tren continue per qualsevol dels trajectes que hi n'ixen.



Un viatger puja a un tren en A sense saber on va, calcula la probabilitat que:

- a) arribe a l'estació 5
- b) arribe a cadascuna de les estacions

51. Tenim dues borses amb 10 boles cadascuna, entre blanques (B), negres (N) i roges (R).

Borsa 1: 7 B 3 N

Borsa 2: 1 B 2 N 7 R

Llancem un dau; si surt 1 o 2, extraiem una bola de la bossa 1. En qualsevol altre cas, extraiem una bola de la bossa 2. Tu guanyes si surt bola roja.

Què és més fàcil guanyar o perdre? (fes servir un diagrama d'arbre)

52. Tres màquines A, B i C produeixen el 50%, 30% i 20% respectivament d'un determinat article. Els percentatges d'articles defectuosos fabricats per cadascuna de les màquines són respectivament el 3%, 4% i 5%.

- a) Quina serà la probabilitat que en seleccionar un article al atzar, siga defectuós?
- b) Es selecciona un article a l'atzar i no és defectuós. Calcula la probabilitat que haja segut fabricat per la màquina B.

53. Un gat fuig d'un ratolí. En un moment donat, el camí que segueix es bifurca en tres (A, B i C), sabent que el gat fuig pel camí A la meitat de les vegades i pel camí B un 30% de vegades i que experimentalment es coneixen les següents probabilitats [+ significa que el ratolí caça el gat]:

- $P(+ \text{ si va per A}) = 0'6$
- $P(+ \text{ si va per B}) = 0'4$
- $P(+ \text{ si va per C}) = 0'3$

a) Quina és la probabilitat que el gat siga caçat pel ratolí?

b) Sabent que el ratolí va caçar el gat, quina és la probabilitat que aquest triara el camí A?

54. Dues amigues juguen dotze partides als escacs, Rosa guanya 6 d'elles, Maria en guanya 4 i queden en taules 2 partides. Totes dues decideixen jugar tres partides més. Tenint en compte, únicament, els resultats anteriors, obtín la probabilitat que:

- Rosa guanye les tres partides
- Dues partides finalitzen en taules
- Rosa i Maria guanyen alternativament
- Maria guanye, almenys, una partida