POTÈNCIES, ARRELS I NOMBRES RADICALS

Si recordem algunes propietats de les potències:

$a^0=1$ → ex: $5^0=1$, $(-3)^0=1$
$a^1=a$ → ex: $17^1=17$, $(-24)^1=-24$
$a^{-n}=1/a^n$ → ex: $3^{-5}=1/3^5$, $4^{-2}=1/4^2$, $(1/5)^{-3}=5^3$, $(4/9)^{-8}=(9/4)^8$
$a^{1/n}=\sqrt[n]{a}$ → ex: $7^{1/5}=\sqrt[5]{7}$, $4^{5/9}=\sqrt[9]{4^5}$, $2^{-4/7}=\sqrt[7]{\frac{1}{2^4}}$

1. Recorda les propietats de les potències i calcula:
a) $4^{12}\cdot 4^{31}$ **b)** $4^{12}:4^{31}$ **c)** $(4^{12})^5$ **d)** $5^7\cdot 8^7$ **e)** $20^5:4^5$ **f)** 82^1 **g)** 49^0

2. Expressa com a potència d'exponent positiu: $5^{-1}7^{-2}$ $(2/3)^{-4}$ $(1/7)^{-6}$ $(2^{10})^{-5}$

La radicació és l'operació contraria de la potenciació. $\sqrt[n]{a}=b \leftrightarrow a=b^n$

- ex: $\sqrt{16}=\pm 4$ ja que $(+4)^2=16$ i $(-4)^2=16$ $\sqrt[3]{125}=5$ doncs $5^3=125$

De manera que una arrel es pot escriure també com a una potència d'exponent fraccionari. $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

- ex: $\sqrt[5]{3}=3^{\frac{1}{5}}$ $\sqrt[3]{7^2}=7^{\frac{2}{3}}$

Per tant, si la fracció de la potència es pot simplificar, aleshores es podran simplificar l'índex i l'exponent del radicand de l'arrel.

- ex: $\sqrt[12]{2^8}=\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2^2}$

3. Expressa en forma exponencial:

a) $\sqrt[5]{4}$ **b)** $\left(\sqrt[7]{x^2}\right)^3$ **c)** $\sqrt[8]{a^{-3}}$ **d)** $\sqrt{\frac{x^{19}}{x^6}}$ **e)** $\sqrt[9]{\sqrt{5^x}}$ **f)** $\sqrt{\sqrt{\sqrt{x^{11}}}}$

4. Expressa en forma radical: $x^{13/3}$ $(a^7\cdot b^7)^{1/4}$ $a^{1/2}\cdot b^{1/3}$ $[(x^3)^{1/2}]^{1/9}$ i $y^{-4/7}$

5. Fent servir únicament la tecla $\sqrt{\ }$ de la calculadora, obté: $\sqrt{1025}$, $\sqrt[4]{48}$ i $\sqrt[8]{3024}$

6. Utilitzant la tecla X^y, obté: 5^8, 2^{-7} i $1'21^{25}$

7. Amb la tecla X^y de la calculadora, obté: $\sqrt{5}$, $\sqrt[6]{5}$ i $\sqrt[3]{5^4}$

8. Fes servir la tecla $X^{1/y}$ o bé $\sqrt[x]{\ }$ de la calculadora per obtenir: $\sqrt{21}$, $\sqrt[5]{14}$, $\sqrt[7]{1024}$ i $\sqrt[10]{3}$

9. Expressa com a potència única: $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{5}$ $\quad 2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ $\quad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}$ $\quad \frac{\sqrt[3]{a^8}}{a^2}$ $\quad \sqrt[5]{\frac{1}{a^2}}$

10. Obté amb la calculadora: $\sqrt[4]{2'3^6}$ $\quad \sqrt[3]{-149}$ $\quad \sqrt[4]{\left(\frac{12}{5}\right)^9}$ $\quad 0'21^{-7/2}$ $\quad \left(\sqrt[6]{0'00043}\right)^{-7}$

11. Posa en forma exponencial: $\sqrt[5]{x^{14}}$ $\quad \left(\sqrt[4]{a^3}\right)^7$ $\quad \sqrt[21]{x^4\cdot x^6}$ $\quad \sqrt[3]{\sqrt[5]{x^2}}$ $\quad \left(\sqrt{a}\right)^{-9}$

12. Expressa com a una arrel: $17^{2/9}$ $\quad (3^{-2})^{5/4}$ $\quad (a^{1/3})^{-4/7}$ $\quad x^2\cdot\sqrt{x}$ $\quad (2^{-4/5})^{-10/3}$

13. Expressa com a potència única: $\frac{\sqrt[3]{a^7}}{a^4}$ $\quad \frac{\sqrt{125}}{\sqrt[3]{25}}$ $\quad \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}$ $\quad \frac{\sqrt[3]{a^2}}{a\cdot\sqrt{a}}$ $\quad \sqrt[4]{\frac{1}{a}}$

14. Simplifica els següents radicals: $\sqrt[12]{x^9}$, $\sqrt[12]{x^8}$, $\sqrt[5]{y^{10}}$, $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[9]{64}$ i $\sqrt[8]{81}$

Donada la contrarietat entre les operacions potència i arrel, per <u>extraure factors d'una arrel</u>, cal que l'exponent del factor siga el mateix que l'índex de l'arrel.

- ex: $\sqrt[3]{2^4\cdot3^3\cdot5^8\cdot7}=\sqrt[3]{2^3\cdot2\cdot3^3\cdot5^3\cdot5^3\cdot5^2\cdot7}=2\cdot3\cdot5\cdot5\cdot\sqrt[3]{2\cdot5^2\cdot7}$

15. Extrau del radical els factors que siga possible: $\sqrt[3]{32x^4}$, $\sqrt[3]{81a^3b^5c}$ i $\sqrt[5]{64}$

Com que per multiplicar o dividir potències de igual base hem de sumar o restar, respectivament, els seus exponents i aquestos es transformen en fraccions en el cas d'una arrel, haurem de <u>reduir a índex comú</u> (comú denominador en el cas de les fraccions) per poder <u>multiplicar o dividir</u> arrels, aquest índex comú serà, evidentment, el mínim comú múltiple dels índex, doncs fan el mateix paper que els denominadors de les potències equivalents.

- ex: $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{2}=2^{\frac{1}{4}}\cdot2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}=2^{\frac{3}{12}+\frac{2}{12}}=2^{\frac{3}{12}}\cdot2^{\frac{2}{12}}=\sqrt[12]{2^3}\cdot\sqrt[12]{2^2}=\sqrt[12]{2^5}$

evidentment, a l'hora pràctica no cal fer el 2n, 3r, 4t i 5è pas → $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{2}=\sqrt[12]{2^3}\cdot\sqrt[12]{2^2}=\sqrt[12]{2^5}$

16. Simplifica: $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}}$, $\frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt[4]{a^3b^5c}}{\sqrt{ab^3c^3}}$, $\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x}$ i $\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}\right)^8$

Per <u>sumar i restar</u> nombres radicals serà necessari que tinguen el <u>mateix índex</u>, però també el <u>mateix radicand</u>.

- ex: $\sqrt{6}+4\sqrt{6}-3\sqrt{7}+2\sqrt{7}=5\sqrt{6}-\sqrt{7}$ que ja no es pot operar més.

17. Efectua: **a)** $\sqrt{18}+\sqrt{50}-3\sqrt{2}-\sqrt{8}$ **b)** $\sqrt{50a}-\sqrt{18a}$

18. Multiplica i simplifica el resultat:

a) $\sqrt{2a}\cdot\sqrt{3a}\cdot\sqrt{6a}$ **b)** $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^4}\cdot\sqrt[3]{b^2}$ **c)** $\sqrt{5a}\cdot\sqrt{10ab}\cdot\sqrt{8a^3b}\cdot\sqrt{a}$

19. Redueix a índex comú i ordena creixentment: **a)** $\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[5]{5}$ **b)** $\sqrt[3]{2^4}, \sqrt[4]{5^3}, \sqrt[6]{3^5}$

20. Multiplica i simplifica: **a)** $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[4]{4}\cdot\sqrt[5]{5}$ **b)** $\sqrt[3]{2^4}\cdot\sqrt[4]{5^3}\cdot\sqrt[6]{3^5}$

21. Introdueix dins de l'arrel i simplifica: **a)** $2\sqrt{\frac{3}{2}}$ **b)** $2\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ **c)** $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{12}$ **d)** $\frac{2}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{4}}$

22. Divideix i simplifica el resultat:

a) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ **b)** $\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$ **c)** $\sqrt[4]{\frac{5}{12}} : \sqrt[4]{\frac{20}{3}}$ **d)** $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{ab}}$ **e)** $\sqrt[6]{20} : \sqrt[4]{10}$

23. Efectua i simplifica, si és possible:

a) $2\sqrt{8} + 4\sqrt{72} - 7\sqrt{18}$ **b)** $3\sqrt{2} + 4\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{50}$ **c)** $5\sqrt{12} + \sqrt{27} - 8\sqrt{75} + \sqrt{48}$
d) $\sqrt{320} + \sqrt{80} - \sqrt{500}$ **e)** $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2}$ **f)** $\sqrt{150} + \sqrt{54} - \sqrt{24}$

<u>Racionalitzar</u> és l'operació que consisteix en llevar les arrels del denominador d'una fracció en tal que resulte més còmode operar posteriorment amb ella.

Si <u>el denominador només té un terme</u>, que és l'arrel a llevar, haurem de trobar un nombre, també radical, pel qual multipliquem numerador i denominador de la fracció, de manera que desaparega l'arrel en qüestió, tenint en compte que perquè això ocórrega l'índex de l'arrel i l'exponent del radicand han de ser iguals.

- ex: $\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{6^2}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

  $\frac{8}{\sqrt[5]{2^2}} = \frac{8\cdot\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}} = \frac{8\sqrt[5]{2^3}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{8\sqrt[5]{2^3}}{2} = 4\sqrt[5]{2^3}$

Si <u>el denominador és un binomi</u>, intentarem trobar un diferència de quadrats en tal que les possibles arrels desaparegan, de manera que multiplicant els dos termes de la fracció per la expressió conjugada (canviar de signe el segon terme del binomi) del denominador ho aconseguirem.

- ex: $\frac{12}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{12\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)} = \frac{12\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5^2}-\sqrt{3^2}\right)} = \frac{12\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3} = \frac{12\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{2} = 6\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$

24. Racionalitza i simplifica:

a) $\frac{7}{\sqrt{7}}$ **b)** $\frac{10}{\sqrt{5}}$ **c)** $\frac{6}{\sqrt{12}}$ **d)** $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ **e)** $\frac{5}{\sqrt[4]{5^3}}$ **f)** $\frac{3}{\sqrt[5]{3^2}}$ **g)** $\frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$ **h)** $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[6]{5}}$

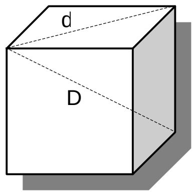
25. Racionalitza i simplifica:

a) $\frac{10}{1+\sqrt{2}}$ **b)** $\frac{12}{3-\sqrt{2}}$ **c)** $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$ **d)** $\frac{11}{2\sqrt{5}+3}$

e) $\dfrac{10}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

26. El mamífer terrestre més gran és l'elefant africà i pot pesar fins a 7 tones, mentre que un determinat tipus de formiga pesa, aproximadament, 4mg. Expressa el pes de l'elefant en mg i el de la formiga en T. Quantes vegades pesa més l'elefant que la formiga? Quant pesarien, expressat en tones, 10 milions de formigues?

27. Un triangle isòsceles té una base d'$\sqrt{3}$ metres, mesurant els costats iguals el doble que la base. Quin és el perímetre del triangle? Calcula l'altura i l'àrea, expressant els resultats en forma radical.



28. En un cub d'$\sqrt{2}$ cm d'aresta, quina és la mida de la diagonal d'una cara? Quant mesura la diagonal del cub? Calcula la seva superfície total i el seu volum, donant el resultat exacte i aproximat.

29. Un virus pollós pesa $2 \cdot 10^{-25}$ grams i una balena rosa $1'38 \cdot 10^{5}$ kg. Quants virus pollosos calen per assolir el pes de la balena?

30. Un anàlisi de sang d'un pacient ha donat els resultats següents:

- Glòbuls vermells: …… $4{,}8.10^{6}$ per mm^3 de sang
- Glòbuls blancs: ……..... $8 \cdot 10^{3}$ per mm^3 de sang

Calcula el nombre total de glòbuls vermells i blancs del pacient, sabent que el seu cos té 5 litres de sang.