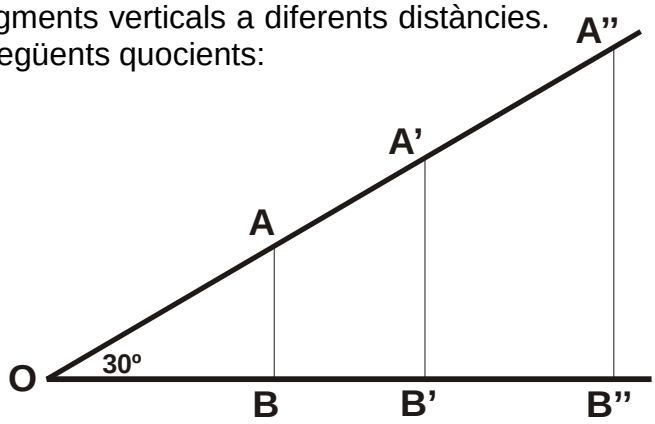
1. Traça un angle de 30º i dibuixa tres segments verticals a diferents distàncies. Mesura les següents distàncies i obtín els següents quocients:



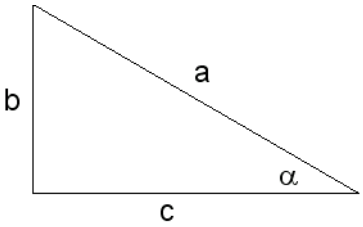
$\frac{AB}{OA}=$ $\frac{OB}{OA}=$ $\frac{AB}{OB}=$

$\frac{A'B'}{OA'}=$ $\frac{OB'}{OA'}=$ $\frac{A'B'}{OB'}=$

$\frac{A''B''}{OA''}=$ $\frac{OB''}{OA''}=$ $\frac{A''B''}{OB''}=$

- Què es dedueix, independentment del segment vertical triat?
- Quin nom rep cadascun dels quocients?
- Repeteix el mateix per a un angle de 50º i un altre de 75º.

Raons trigonomètriques:



$$\sin\alpha=\frac{catet\ oposat}{hipotenusa}=\frac{b}{a}$$

$$\cos\alpha=\frac{catet\ contigu}{hipotenusa}=\frac{c}{a}$$

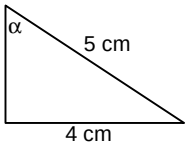
$$tg\alpha=\frac{catet\ oposat}{catet\ contigu}=\frac{b}{c}$$

A més, ...

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{b/a}{c/a}=\frac{b}{c}=tg\alpha$$

per tant $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

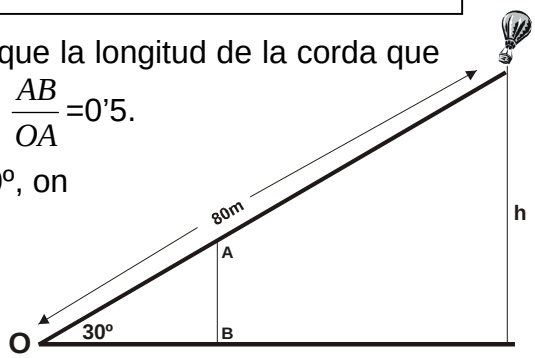
- Obtín les raons trigonomètriques de l'angle indicat:



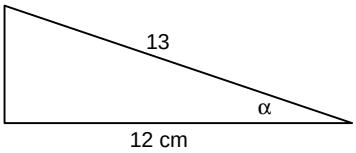
- Si el sinus d'un angle és 0'89 i la seva tangent és 2, quant val el cosinus?

2. Calcula l'altura on es troba un globus, sabent que la longitud de la corda que el subjecta és de 80m i que per a un angle de 30º, $\frac{AB}{OA}$=0'5.

- Obtín l'altura del globus si l'angle fóra de 50º, on $\frac{AB}{OA}$=0'766.

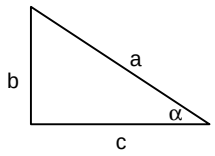


- Obtín les raons trigonomètriques de l'angle indicat:



Propietats inicials de les Raons Trigonomètriques:

Com que tant el sinus com el cosinus s'obtenen com el quocient d'un catet, dividit per la hipotenusa, el seu resultat serà menor o igual que la unitat.



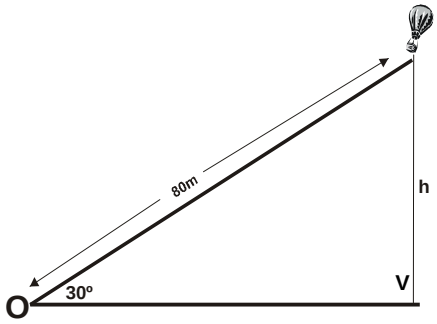
$\sin\alpha = b/a \leq 1$

$\cos\alpha = c/a \leq 1$

3. Dibuixa un triangle rectangle, sent 40º un dels seus angles aguts. Mesura els costats del triangle i dedueix les raons trigonomètriques de 40º y 50º. Compara-les amb les que s'obtenen amb calculadora.

Quina relació creus que hi ha entre les R.T. d'angles complementaris (sumen 90°)?

4. Aplicant la definició de sinus d'un angle, sabent que sin30º=0'5 i que la corda que subjecta el globus mesura 80m, calcula l'altura a la que es troba el globus. Com calcularies la distància que hi ha des de la vertical del globus, V, fins a qui el subjecta, O?



Inverses de les Raons Trigonomètriques:

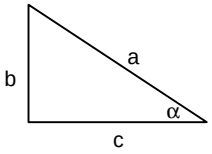
Secant $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$

Cosecant $\cos ec\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$

Cotangent $\cot g\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$

Relacions fonamentals:

I.- $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ja que:



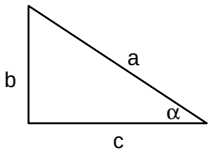
$$\sin\alpha = \frac{b}{a} \rightarrow \sin^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} \qquad \cos\alpha = \frac{c}{a} \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{c^2}{a^2}$$

per tant $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2+c^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

sabent que sin20°=0'341, calcula el cosinus i la tangent de 20°

en un exercici anterior, $\sin\alpha$=0'35 i $\cos\alpha$=0'175, comprovar si és possible

II.- $1+tg^2\alpha=\sec^2\alpha$ ja que:



$$tg\alpha = \frac{b}{c} \rightarrow tg^2\alpha = \frac{b^2}{c^2}$$

$$1 + tg^2\alpha = 1 + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2+b^2}{c^2} = \frac{a^2}{c^2} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = \sec^2\alpha$$

III.- $1+cotg^2\alpha=cosec^2\alpha$ (fer-ne la demostració corresponent)

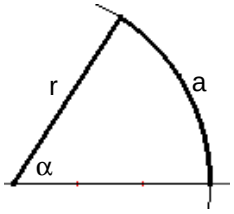
5. Obtín la resta de raons trigonomètriques de x a partir d'aquella R.T. que ja es coneix, suposant que 0º<x<90º:

a) sinx=0'25 b) cosx=1/4 c) tgx=$\sqrt{2}$ d) secx=1'4 e) cosecx=2'5

Unitats per mesurar angles:

Sistema sexagesimal $\rightarrow \begin{cases} graus(^{o}) & \\ \min uts(') & 1^{o} = 60' \\ segons(") & 1' = 60" \end{cases}$ Sistema centesimal $\rightarrow \begin{cases} graus(^{o}) & \\ \min uts(') & 1^{o} = 100' \\ segons(") & 1' = 100" \end{cases}$

Un Radià és l'obertura d'un angle de manera que l'arc corresponent coincideix amb el radi amb què està traçat. Si a = r $\rightarrow$ α=1 radià



Com que en una circumferència està 2π vegades el radi $\rightarrow$ 360º≈2π radians

Per tant, a quant equivalen 180º, 90º, 45º, 60º, 30º ?

Obtenir l'equivalència en radians de 120º, 135º, 100º

Calcular a quants graus sexagesimals equivalen $\frac{13\pi}{6}$ radians

6. Obtín l'equivalència en radians dels angles: 135º, 150º, 180º, 210º, 225º, 240º, 270º, 300º, 315º, 330º, 360º.

Signes de les Raons Trigonomètriques:

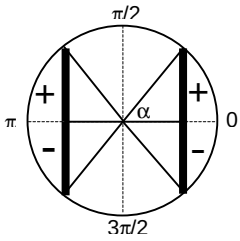
Suposem una circumferència de radi=1, per tant la hipotenusa de cada triangle rectangle és 1.

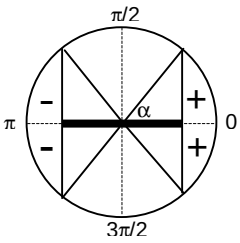
El signe del sinus ve definit pel catet oposat, per tant pel catet vertical del triangle.

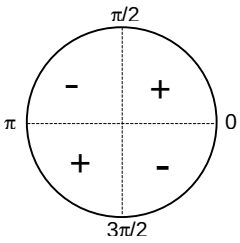
El signe del cosinus ve definit pel catet contigu, per tant pel catet horitzontal del triangle

El signe de la tangent l'obtindrem com el quocient dels signes de les dues R.T. anteriors.

SINUS COSINUS TANGENT





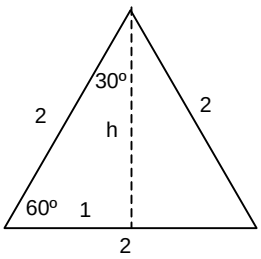


7. Completa la taula següent:

Graus	0º		45º		90º		270º	
Radians		π/6		π/3		π		2π
Sin								
Cos								
Tg								

Raons Trigonomètriques d'angles fonamentals:

Dibuixem un triangle equilàter, per tant cada angle és de 60º, de costat 2 unitats:

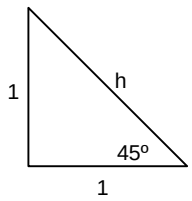


Pel Tª de Pitàgores $\rightarrow 2^2=1^2+h^2 \rightarrow h=\sqrt{3}$

Per tant, aplicant les definicions adients:

$\sin 30º=\frac{1}{2}$ $\cos 30º=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $tg30º=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin 60º=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos 60º=\frac{1}{2}$ $tg60º=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$



Si dibuixem un triangle rectangle de catets iguals, per exemple 1 unitat, els angles aguts són de 45º:

Pel Tª de Pitàgores $\rightarrow h^2=1^2+1^2=2 \rightarrow h=\sqrt{2}$

$\sin 45º=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos 45º=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $tg45º=\frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2}=1$

- ex: Obtenir el valor exacte de $2\cdot\sin 45º-8\cdot\cos 45º+10\cdot\cos 30º-6\cdot\sin 60º$
- ex: Calcular el valor exacte de $5\sqrt{3}\cdot tg\,30º-4tg\,45º+10\sqrt{3}tg\,60º$

8. Calcula la resta de raons trigonomètriques dels angles següents, sota les condicions que s'expressen en cada cas:

a) sinx=0'4, 90º<x<180º b) cosx=-0'75, 180º<x<270º c) tgx=2'3, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

d) secx=3'12, $x \in \left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$ e) cosecx=-4'3, 180º<x<270º f) cotgx=-0'6, x∈2n quadr.

9. A la cala de "la cova de l'arc" de Benitatxell ens trobem amb aquest senyal de trànsit que ens informa del "pendent" de la carretera. Significa que per cada 100 m de carretera hi ha un ascens vertical de 22 m. Quant pugem si recorreguem 800 m? Calcula l'angle que forma la carretera amb l'horitzontal.

Si coneixem les raons trigonomètriques d'un angle i volem calcular l'angle corresponent, farem servir les funcions inverses, arc: arcsin, arccos, arctg

- ex: si sinα=0'22 → α=arcsin0'22=12º42'32''

10. En una ruta de muntanya un senyal indica una altitud de 785 m. Tres quilòmetres més endavant, l'altitud és de 1065 m. Obtín el pendent d'eixa ruta i l'angle que forma amb l'horitzontal.

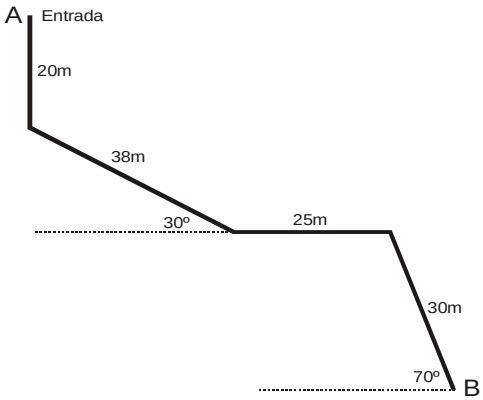
RESOLUCIÓ DE TRIANGLES RECTANGLES

11. Calcula l'alçària d'una torre, sabent que la seva ombra mesura 13 m quan els raigs del sol formen un angle de 55º amb el terra.

12. Una escala està recolzada en una paret formant un angle de 30º amb el terra. Calcula la longitud de l'escala sabent que està recolzada a 1'5 m de la paret. Fins a quina altura aplega en aquesta posició?

13. Quina inclinació tenen els raigs solars en un moment en què l'ombra d'una persona de 1'60 m d'altura és de 2'4 m?

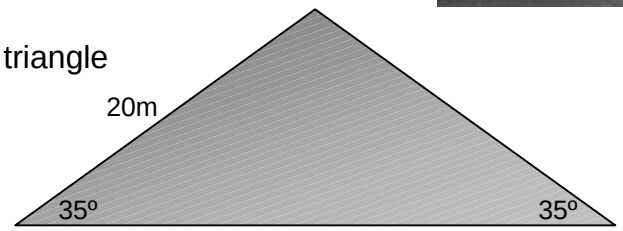
14. Els espeleòlegs fan servir un carret de corda per a mesurar la fondària d'una cova subterrània. Solten el fil de la bobina i mesuren la llargària i l'angle que forma amb l'horitzontal. Calcula la profunditat del punt B, així com la distància en horitzontal fins la vertical de l'entrada.



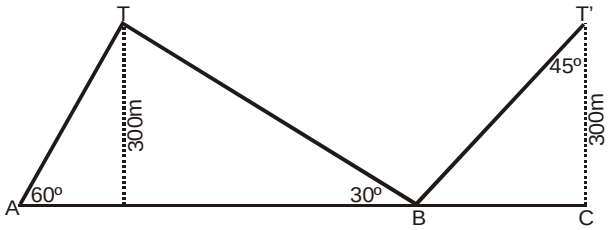
15. Rosa observa un globus sota un angle d'elevació de 50º, mentre que Pere, situat 5 metres més enrere, l'observa sota un angle de 40º. A quina distància del terra està el globus?

16. Des de la torre de control d'un aeroport s'estableix comunicació amb un avió que es troba a una altura de 1.200 m i l'angle que forma la visual amb l'horitzó és de 25º. A quina distància està l'avió del peu de la torre, si aquesta mesura 40 m d'alçària?

17. Calcula l'àrea d'aquest triangle



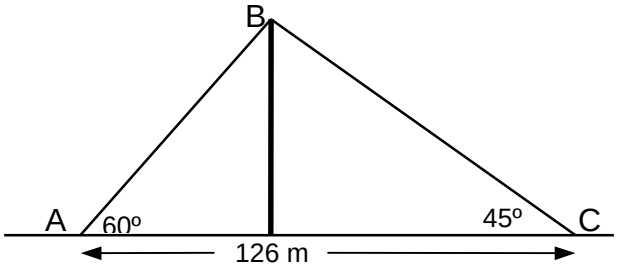
18. Una línia d'alta tensió passa per dos transformadors T i T'. Calcula la longitud del cable que va des de A fins a T' passant per B. Si no tinguera que passar per B, quina quantitat de cable s'estalviaria unint A amb T i T'?



19. Un túnel descendeix 300 metres formant un angle de 45º amb l'horitzontal; desprès puja amb una inclinació de 30º amb l'horitzontal, fins que els extrems estiguen a la mateixa altura. Quina és la longitud de la segona part del túnel?

20. Una antena de radio està subjecta al terra amb dos tirants de cable d'acer, com indica la figura. Calcula:

a) L'alçària de l'antena
b) La longitud dels cables
c) El valor de l'angle ABC



21. Un helicòpter vola entre dues ciutats A i B que disten 8 Km entre sí. Les visuals des de A i B fins a l'helicòpter formen angles de 13º i 8º amb l'horitzontal, respectivament. A quina distància es troba de cada ciutat? A quina altura està volant?

RELACIONS ENTRE ANGLES I ENTRE RAONS TRIGONOMÈTRIQUES

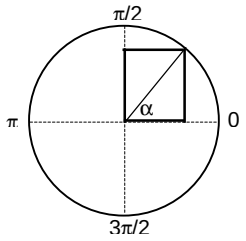
En aquest punt es tracta de relacionar les raons trigonomètriques de qualsevol angle amb les corresponents d'un angle situat al primer quadrant.

<u>1r quadrant</u> (angles complementaris): $\left\langle \begin{array}{l} \alpha \\ 90^{o}-\alpha \end{array} \right.$

$\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90°-\alpha) = \sin\alpha$

$tg(90°-\alpha) = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = cotg\alpha$



- ex: si sabem que el sin25°=0'42, el cos25°=0'91 i la tg25°=0'47, calcula les R.T. de 65°.

  sin65°=sin(90°-25°)=cos25°=0'91 cos65°=cos(90°-25°)=sin25°=0'42

  tg65°=tg(90°-25°)=cotg25°=1:0'47=2'12

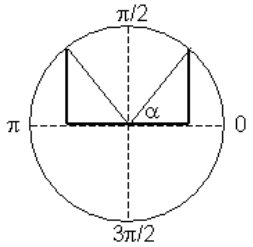
- ex: sabent les R.T. de 15°, calcula les de 75°.

<u>2n quadrant</u> (angles suplementaris): $\left\langle \begin{array}{l} \alpha \\ 180^{o}-\alpha \end{array} \right.$

$\sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$

$\cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$

$tg(180°-\alpha) = \dfrac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -tg\alpha$



- ex: a partir de les raons trigonomètriques de 25°, calcular les R.T. de 155°.

  Sin155°=sin(180°-25°)=sin25°=0'42 cos155°=cos(150°-25°)=-cos25°=-0'91

  Tg155°=tg(180°-25°)=-tg25°=-0'47

- ex: a partir de les raons trigonomètriques de 15°, obtín les de 165°

22. A partir de les raons trigonomètriques de 40º, calcular les R.T. de 50º i 140º.

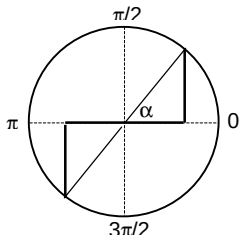
23. Buscar amb la calculadora les raons trigonomètriques de 70º i a partir d'elles obtenir les de 20º i les de 110º.

<u>3r quadrant</u> (angles que es diferencien en 180°): $\left\langle \begin{array}{l} \alpha \\ 180^{o}+\alpha \end{array} \right.$

sin(180°+α) = –sinα

cos(180°+α) = –cosα

tg(180°+α) = $\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}$ = tgα



- ex: sabent de les raons trigonomètriques de 25, calcular les R.T. de 205°.

  sin205°=sin(180°+25°)= –sin25°= –0'42 cos205°=cos(180°+25°)= –cos25°= –0'91

  tg205°=tg(180°+25°)= tg25°= 0'47

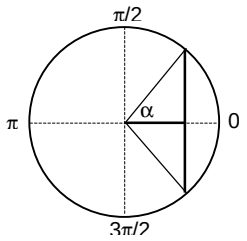
- ex: a partir de les raons trigonomètriques de 15°, calcula les de 195°.

<u>4t quadrant</u> (angles oposats): $\left\langle \begin{array}{l} \alpha \\ 360^{o}-\alpha \end{array} \right.$

sin(360°–α) = –sinα

cos(360°–α) = cosα

tg(360°–α) = $\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}$ = –tgα



- ex: a partir de les raons trigonomètriques de 25, calcular les R.T. de 335°.

  sin335°=sin(360°–25°)= –sin25°= –0'42 cos335°=cos(360°–25°)= cos25°= 0'91

  tg335°=tg(360°–25°)= –tg25°= –0'47

- ex: a partir de les raons trigonomètriques de 15°, calcular les de 345°.

24. Sabent les R.T. de 70º, calcular les de 250º i les de 290º.

25. A partir de les raons trigonomètriques de 10º, calcular les R.T. de 80º, 170º, 190º i 350º.

26. A partir d'angles coneguts del primer quadrant, obtín sense calculadora les raons trigonomètriques dels angles: 120º, 135º, 150º, 210º, 225º, 240º, 300º, 315º, 330º.

27. A partir de las raons trigonomètriques de 28º, calcula les dels angles que s'indiquen:
a) 62º b) 152º c) 208º d) 332º e) 118º

28. Simplifica les següents expressions trigonomètriques:

a) $\sec\alpha - \sec\alpha.\sin^2\alpha$ b) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha-\cos\alpha)^2$ c) $\frac{\sec\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha.\operatorname{tg}\alpha}$

d) $\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$ e) $\frac{\sec^2\alpha-\cos^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$ f) $\frac{\sin^3\alpha+\sin\alpha.\cos^2\alpha}{\cos\alpha}$

29. Troba tots els angles x, que complisquen :

a) $2\cos x = \sqrt{3}$ b) $2\sin x = \sqrt{2}$ c) 1+tgx=0 d) sinx=-0'45

30. Per a quins angles es compleixen les següents igualtats:

a) sinx=sin38º b) cosx=cos80º c) tgx=tg27º d) sin2x=-sin38°
e) sinx=cos14º f) tg3x=-tg2x

31. Resoldre les següents equacions trigonomètriques, donant les solucions compreses en l'interval $[0,2\pi[$ i la solució general:

a) $tg^2x+3=4tgx$ b) $\sin^2x+\sin x-2=0$ c) $3\cos x+\sin^2x=3$
d) $\cos^2x-\sin^2x+5\cos x+3=0$ e) $2\cos^2x+\sin x=1$ f) $3tg^2x-\sqrt{3}\,tgx=0$

32. Comenta les següents afirmacions:

a) cos140º=2cos70º b) sinx+cosx=1 c) $\sin x^2=\sin^2x=(\sin x)^2$
d) $\cos(\cos x)=\cos^2x$ e) sinx+sin(x+180º)=0

Exercicis de Repàs al final del bloc.