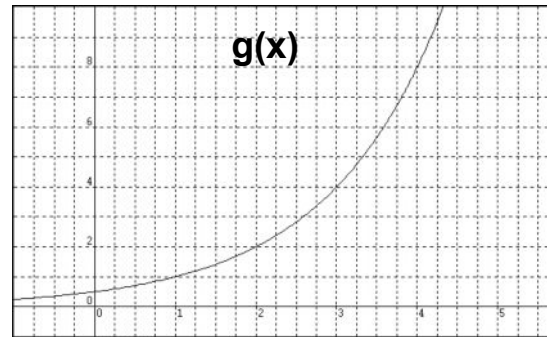
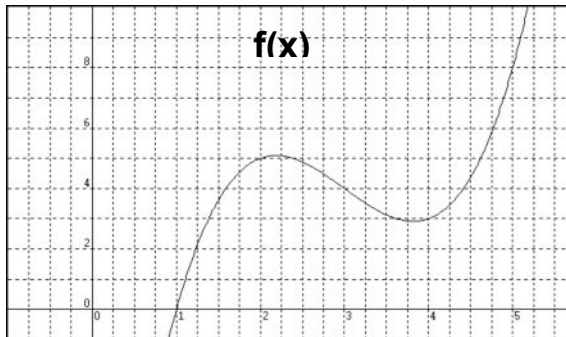
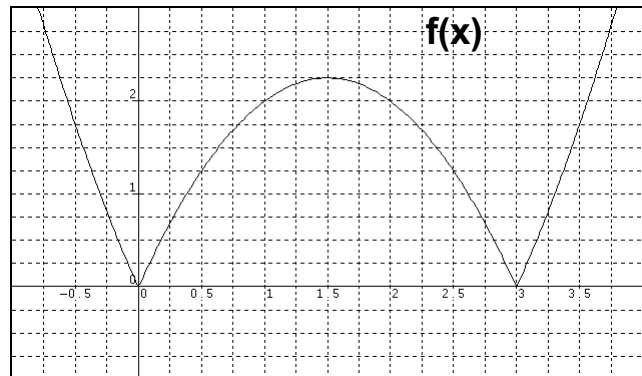


1. Calcula la Tasa de Variación Media de las siguientes funciones en los intervalos: [1,2], [2,3], [2,4]



2. Obtén la t.v.m. en los intervalos [1,2], [2,3], [2,4], de las funciones siguientes:  
 a)  $y=x^3-3x^2+5$       b)  $y=\sqrt{x^2+7}$
3. Al lanzar un cierto cohete, la relación entre el tiempo (minutos) y la distancia (km) recorrida, viene dada por la ecuación  $d(t)=t^2+10t$   
 a) ¿Cuál es su velocidad media en los intervalos: [2,3], [2'5,3], [2'9,3], [2'99,3], [2'999,3]?  
 b) ¿Cuál es su velocidad instantánea a los 3 minutos de la salida?
4. Se ha conseguido que unas bacterias, bajo ciertas condiciones de cultivo, se multipliquen rápidamente. El número de ellas al cabo de t minutos viene dado por:  $N(t)=50+50t+10t^2$ .  
 ¿Cuál es su velocidad de crecimiento al cabo de 5 minutos?. ¿Y a los 7 minutos?.
5. a) Obtén, aplicando la definición de derivada, las funciones derivadas de:  
 $f(x)=x^2-3x$        $g(x)=\frac{1}{x-2}$        $h(x)=\sqrt{x+3}$   
 b) ¿Cuánto vale  $f'(5)$ ,  $g'(4)$  y  $h'(-2)$ ?
6. En un cierto instante, los móviles cuyas trayectorias siguen, respectivamente, las ecuaciones:  $e(t)=t^3-45t+100$      $s(t)=3t^2+60t-439$ ; están en el mismo lugar y con la misma velocidad. Di cuál es ese instante y los valores correspondientes del lugar, de la velocidad y de la aceleración de cada uno de ellos.
7. Estudia si la función  $f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq -1 \\ -x-1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$  es Continua y Derivable en  $x_1 = -1$  y  $x_2 = 1$
8. Analiza si la función  $f(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si } x > 0 \\ x^2+3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$  es Continua y Derivable en  $x_1=0$  y  $x_2=2$
9. Estudia la Continuidad y Derivabilidad de la función  $f(x)=|x^2-1|$  en  $x_1=0$  y  $x_2=-1$  y  $x_3=1$
10. ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva  $y=x^2+4x+1$  en el punto de abscisa 0?

11. Halla el punto en que la tangente a la función  $f(x)=x^2-6x+8$  es paralela a la bisectriz de segundo cuadrante.
12. Calcula el valor que debe tomar  $k$  para que la función  $f(x)=\begin{cases} kx-2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+3x-2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$  sea derivable en el punto de abscisa 0.
13. Dada la parábola  $f(x)=x^2-2x+5$ , se considera la recta  $r$  que une los puntos de esa parábola de abscisas  $x_1=1$  y  $x_2=3$ . Halla la ecuación de la recta tangente a la parábola, que es paralela a la recta  $r$ .
14. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones reales:
- a)  $f(x)=|x-2|$       b)  $g(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x > 0 \\ x^3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$       c)  $h(x)=|x^2-5x+6|$
15. Dada la curva  $f(x)=x^2+3x+4$ . Halla los puntos de esa curva en los que:
- a) la tangente es paralela a la recta  $y=5x-9$   
b) la tangente pasa por el origen de coordenadas
16. A partir de la función  $f(x)$ , cuya gráfica se adjunta, indica:
- a) Su Continuidad y Derivabilidad  
b) La t.v.m. en  $[0,5,1]$   
c)  $f'(1,5)$  y  $f'(2)$   
d) recta tangente en  $x_1=1,5$   
e) recta tangente en  $x_2=2$   
f) recta secante entre  $x_1=1,5$  y  $x_2=2$



**Tabla de DERIVADAS de funciones elementales**

<b>f(x)</b>	<b>f'(x)</b>	<b>f(x)</b>	<b>f'(x)</b>
k	0	sen x	cos x
x	1	cos x	-sen x
x <sup>n</sup>	n.x <sup>n-1</sup>	tg x	1+tg <sup>2</sup> x
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	cosec x	-cosecx.cotgx
1/x	-1/x <sup>2</sup>	sec x	secx.tgx
e <sup>x</sup>	e <sup>x</sup>	cotg x	-(1+cotg <sup>2</sup> x)
a <sup>x</sup>	a <sup>x</sup> .ln(a)	arcsen x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
ln(x)	1/x	arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
log <sub>a</sub> (x)	1/x.log <sub>a</sub> (e)	arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$

**Operaciones con funciones derivables**

- (f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)**      (senx+lnx)'=(senx)'+(lnx)'=cosx+1/x  
 (x<sup>4</sup>+tgx)'=(x<sup>4</sup>)'+(tgx)'=4x<sup>3</sup>+1+tg<sup>2</sup>x
- (f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)**      (5<sup>x</sup>-cosx)'=(5<sup>x</sup>)'-(cosx)'=5<sup>x</sup>.ln5-(-senx)=5<sup>x</sup>.ln5+senx  
 (6-secx)'=(6)'-(secx)'=0-secx.tgx=-secx.tgx
- [k.f(x)]'=k.f'(x)**      (4.lnx)'=4.(lnx)'=4.1/x=4/x  
 (-8.e<sup>x</sup>)'=-8.(e<sup>x</sup>)'=-8.e<sup>x</sup>
- (f.g)'(x)=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)**      (x<sup>3</sup>.cosx)'=(x<sup>3</sup>)'.cosx+x<sup>3</sup>.(cosx)'=3x<sup>2</sup>.cosx+x<sup>3</sup>.(-senx)  
 (e<sup>x</sup>.lnx)'=(e<sup>x</sup>)'.lnx+e<sup>x</sup>.(lnx)'=e<sup>x</sup>.lnx+e<sup>x</sup>.1/x
- (f/g)'(x)= $\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{g^2(x)}$**        $\left(\frac{\text{sen } x}{x}\right)' = \frac{(\text{sen } x)' \cdot x - \text{sen } x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\text{cos } x \cdot x - \text{sen } x \cdot 1}{x^2}$   
 $\left(\frac{e^x}{x^2}\right)' = \frac{(e^x)' \cdot x^2 - e^x \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4}$
- (g◦f)'(x)=g'[f(x)].f'(x)**      (tg<sup>3</sup>x)'=(3tg<sup>2</sup>x).(tgx)'=3tg<sup>2</sup>x.(1+tg<sup>2</sup>x)  
 (tgx<sup>3</sup>)'=(1+tg<sup>2</sup>x<sup>3</sup>).(x<sup>3</sup>)'=(1+tg<sup>2</sup>x<sup>3</sup>).3x<sup>2</sup>

Calcula la derivada de las siguientes funciones, simplificando el resultado.

1.  $y = x^3 + x^2 + x$

4.  $y = x(1+x)^5$

7.  $y = \frac{1+x}{1-x}$

10.  $y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$

13.  $y = (1+x^2)^7$

16.  $y = x^6 - 6x^4$

19.  $y = x^4 + 2x^3 + 2$

22.  $y = (x^2 - 1)(x^2 + 4)$

25.  $y = (a - bx + cx^2)^n$

28.  $y = \frac{1-2x}{2-x}$

31.  $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x^2 + 2x + 4}$

34.  $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

37.  $y = \sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt{2x}}$

40.  $y = \frac{2 - 3x^2}{1 + 2x}$

43.  $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

46.  $y = \ln(2-x)$

49.  $y = x^n \ln x$

52.  $y = \sqrt{x(4-x^2)}$

55.  $y = \ln[(x+2)x^n]$

58.  $y = \ln \frac{x(x-1)}{(3-x)^2}$

61.  $y = e^{4x}$

64.  $y = e^{x^2}$

67.  $y = \frac{e^{ax}}{\sqrt{x}}$

2.  $y = 5x^4 - 4x^5$

5.  $y = x \operatorname{sen} x$

8.  $y = \frac{3x}{\operatorname{sen} x}$

11.  $y = x^3 \cos x$

14.  $y = \ln(\operatorname{sen} x)$

17.  $y = 6x^{1/2} - 9x^{2/3}$

20.  $y = x^{1/5} - a^{2/3}$

23.  $y = (x^2 - 4)(x^4 + 3)$

26.  $y = x^2 \sqrt{7-2x}$

29.  $y = \frac{1-4x}{7-x}$

32.  $y = \frac{\sqrt{x}}{1-x}$

35.  $y = \frac{(x+2)(x-3)}{x(x-1)}$

38.  $y = (x+2)\sqrt{x^2+4x}$

41.  $y = x^3 - 2\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$

44.  $y = \sqrt[3]{1+2x} \cdot \sqrt{1+3x}$

47.  $y = \ln(a + bx^2)$

50.  $y = x^2 \ln(2-x)$

53.  $y = \frac{\ln(ax+b)}{x^2}$

56.  $y = \ln \sqrt[n]{x^2+1}$

59.  $y = \ln \sqrt{x(1-x)}$

62.  $y = e^{3-x}$

65.  $y = x^2 e^{3x}$

68.  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{e^x}$

3.  $y = 2 \ln x + \operatorname{sen} x - 4 \cos x$

6.  $y = x^3 \ln x$

9.  $y = \frac{\ln x}{x}$

12.  $y = x \operatorname{tg} x$

15.  $y = 2x^4 - 3x^2$

18.  $y = 4x^{-1} - 7x^{-2}$

21.  $y = x^n(1 + \sqrt{x})$

24.  $y = (a - bx + cx^2)^2$

27.  $y = \frac{3x+4}{5x-3}$

30.  $y = \frac{x^4+4}{x^4-4}$

33.  $y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$

36.  $y = \frac{\sqrt[3]{2+6x}}{x}$

39.  $y = (x+1)\sqrt[3]{x-1}$

42.  $y = x^4 \sqrt{1-3x}$

45.  $y = \ln(2x+1)$

48.  $y = \ln(x^2 - 3x - 1)$

51.  $y = \sqrt[3]{3x^2 - 10}$

54.  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

57.  $y = \ln \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

60.  $y = \ln(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})$

63.  $y = e^{a+bx}$

66.  $y = \frac{e^{2x}}{x^2}$

69.  $y = a^{nx}$

$$70. y = \frac{1}{e^{2x}}$$

$$73. y = \frac{a}{\sqrt{x}}:$$

$$76. y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$79. y = 2^{-3x}$$

$$81. y = 2^{3-x}$$

$$84. y = \sqrt[3]{x}$$

$$87. y = \sqrt[3]{1-2x}$$

$$90. y = \sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$$

$$93. y = \frac{4-\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$96. y = x \operatorname{sen} x$$

$$99. y = 3 \cos^2 2x - 3 \operatorname{sen}^2 2x$$

$$102. y = \operatorname{cosec} x$$

$$105. y = \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$$

$$108. y = \operatorname{arcsen} \sqrt{x}$$

$$111. y = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln \cos x$$

$$114. y = \operatorname{sen}(\ln x)$$

$$116. y = \operatorname{arcsen}(2x\sqrt{1-x^2})$$

$$119. y = \operatorname{sen}^2(\ln x)$$

$$122. y = \operatorname{cosec} x^2$$

$$125. y = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x - \cos x}$$

$$128. y = \ln x^2 + \ln^2 x$$

$$131. y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

$$71. y = e^{\sqrt{x}}$$

$$74. y = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$77. y = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x} + \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$80. y = x \ln(4x^2 - 1) - 2x - \frac{1}{2} \ln \frac{2x-1}{2x+1}$$

$$82. y = x^x$$

$$85. y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$$

$$88. y = x^{x^x}$$

$$91. y = \sqrt{\operatorname{sen} 7x}$$

$$94. y = \cos 5x$$

$$97. y = \cos^2 3x$$

$$100. y = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x$$

$$103. y = \cot gx$$

$$106. y = \operatorname{arctg} \frac{3x^2 - x^3}{1 - 3x^2}$$

$$109. y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$112. y = \arccos x^2$$

$$115. y = \ln \sqrt{\frac{\sqrt{1+\cos x} + \sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{1-\cos x} - 3\sqrt{1+\cos x}}}$$

$$117. y = \ln^3 \sqrt{e^{\operatorname{sen}^2 \sqrt{x^2+1}}}$$

$$120. y = \cot gx$$

$$123. y = \frac{1-\operatorname{sen} x}{1-\cos x}$$

$$126. y = (x^2 - 3x + 1) \operatorname{sen} x + x \cos x$$

$$129. y = \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2}$$

$$132. y = \operatorname{arctg} x + \ln(x^2 + 1)$$

$$72. y = 10^{x/2}$$

$$75. y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$78. y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$80. y = x \ln(4x^2 - 1) - 2x - \frac{1}{2} \ln \frac{2x-1}{2x+1}$$

$$83. y = (1-x)^x$$

$$86. y = \sqrt{(1-x)^x}$$

$$89. y = 3 \operatorname{sen} x - \cos x$$

$$92. y = \ln \operatorname{tg} x$$

$$95. y = \operatorname{sen}(3x + 4)$$

$$98. y = \ln \operatorname{sen} x^2$$

$$101. y = \sec x$$

$$104. y = \operatorname{tg} x - \cot gx$$

$$107. y = x^{\operatorname{tg} x}$$

$$110. y = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x - \operatorname{sen} x}$$

$$113. y = \ln \operatorname{sen} x^3$$

$$118. y = \operatorname{sen}(\cos x)$$

$$121. y = \sec^2 x$$

$$124. y = \ln(x^3)$$

$$127. y = e^{2x}$$

$$130. y = 3^x$$

$$133. y = \frac{e^x}{\cos x}$$

## Estudio y Representación Gráfica de FUNCIONES

1. A partir de las funciones siguientes:

$$f_1(x)=x^3-12x \quad f_2(x)=x^4-2x^2-3 \quad f_3(x)=(2-x)^4 \quad f_4(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$f_5(x)=\frac{x}{x^2+1} \quad f_6(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad f_7(x)=\ln(x^2+1) \quad f_8(x)=\text{sen}(x/2)$$

- a) Obtén los puntos singulares y los intervalos de Crecimiento y Decrecimiento  
b) Halla sus extremos relativos (Máximos y Mínimos)

2. A partir de las funciones siguientes:

$$f_1(x)=x^3-3x \quad f_2(x)=x^3-3x^2+4x \quad f_3(x)=x^4-4x^3 \quad f_4(x)=1-(x-1)^3$$

- a) Calcula los puntos de inflexión  
b) Obtén los intervalos de Concavidad y Convexidad

3. Estudia las posibles Asíntotas de las siguientes funciones:

$$f_1(x)=\frac{1}{1-x^2} \quad f_2(x)=\frac{x^2+1}{x} \quad f_3(x)=\frac{x^4}{x^2-4} \quad f_4(x)=\frac{2x^3}{x^2+1}$$

$$f_5(x)=\frac{e^x}{x} \quad f_6(x)=\frac{\ln x}{x}$$

4. Analiza las posibles simetrías de las siguientes funciones:

$$f_1(x)=\frac{1}{1-x^2} \quad f_2(x)=\frac{x^2+1}{x} \quad f_3(x)=\frac{x^4-x}{x^2-4} \quad f_4(x)=\frac{2x^3}{x^2+1}$$

5. Calcula b y c para que la función  $y=x^2+bx+c$  tenga un mínimo en el punto (-1,-4).

6. Halla a y b para que la función  $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$  tenga un máximo en  $x=-1$  y un punto de inflexión cuando  $x=0$ .

7. Efectúa un estudio completo y representa gráficamente las funciones siguientes:

$$\text{a) } y=x^3+x^2-x \quad \text{b) } y=\frac{6x}{x^2+1} \quad \text{c) } y=\frac{x^2+9}{x^2-4} \quad \text{d) } y=\frac{x^3}{x^2-1}$$

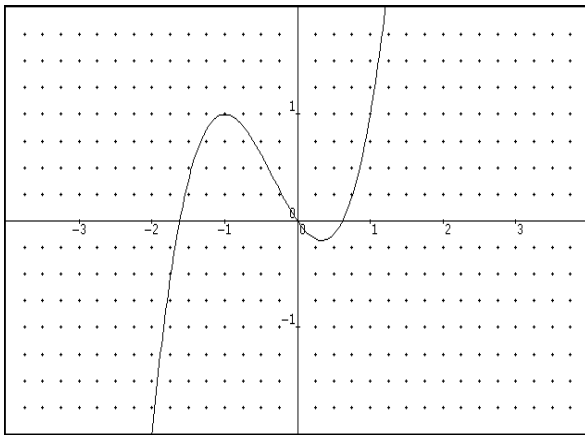
$$\text{e) } y=\frac{x+1}{x-2} \quad \text{f) } y=\frac{x}{x^2-1} \quad \text{g) } y=3x^2-2x+5 \quad \text{h) } y=x^3+1$$

$$\text{i) } y=x^3-6x^2+8x \quad \text{j) } y=x.e^x \quad \text{k) } y=\frac{2-x}{x+1} \quad \text{l) } y=\ln(x+1)$$

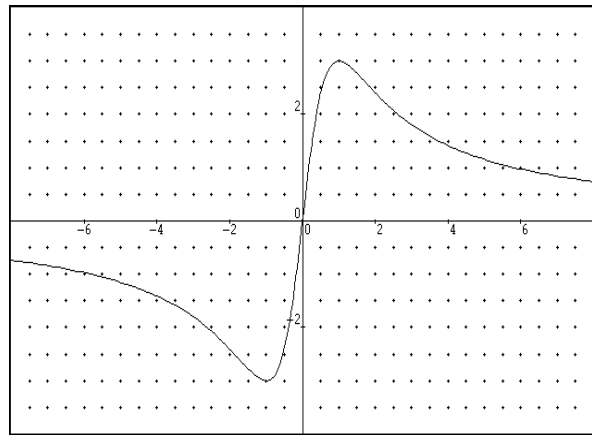
### Problemas clásicos de OPTIMIZACIÓN

1. Una hoja de papel debe contener  $18 \text{ cm}^2$  de texto impreso. Los márgenes superior e inferior deben tener 2 cm de altura cada uno y los laterales 1 cm. ¿Qué dimensiones debe tener la hoja para que el gasto de papel sea mínimo?
2. Un pastor dispone de 1.000 m de tela metálica para construir una cerca rectangular, aprovechando una pared ya existente. Halla las dimensiones de la cerca para que el área encerrada sea máxima.
3. Recortando un cuadrado de cada esquina de unos cartones rectangulares de dimensiones 6 cm y 8 cm, se pueden construir cajas sin tapa. ¿Qué medida deben tener esos cuadrados para que el volumen de la caja sea máximo?
4. Se quiere construir una vasija cilíndrica de  $\frac{1}{3}$  de litro de capacidad, de forma que se emplee la menor cantidad posible de chapa. Calcula el radio y la altura de dicho recipiente.
5. Con una cuerda de 90 m de longitud se desea cercar dos jardines, uno cuadrado y otro circular. Halla la longitud que se debe dar a cada trozo para que la suma de las superficies sea mínima.
6. Un video-club tiene y 500 socios, con una cuota mensual de 30€. Además de éstos, puede conseguir 100 socios más por cada 3€ que disminuya la cuota.
  - a) ¿Cuál será la cuota que le produce al video-club un ingreso mensual máximo?
  - b) ¿Cuántos socios tendrá en dicho caso?
7. Se quiere vallar un campo rectangular que está junto a un camino. Si la valla del lado del camino cuesta 5€/m y la de los otros lados 2€/m, obtén el área del mayor campo que se puede vallar con 28.000 ptas.
8. Halla las dimensiones de un rectángulo de área máxima inscrito en una circunferencia de 10 m de radio.
9. Encontrar entre todas las rectas que pasan por el punto  $P(1,2)$ , la que forma con las partes positivas de los ejes coordenados un triángulo de área mínima. Obtén dicha área.

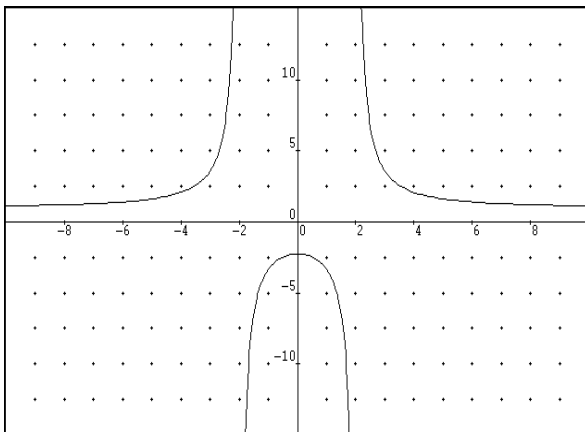
$$y = x^3 + x^2 - x$$



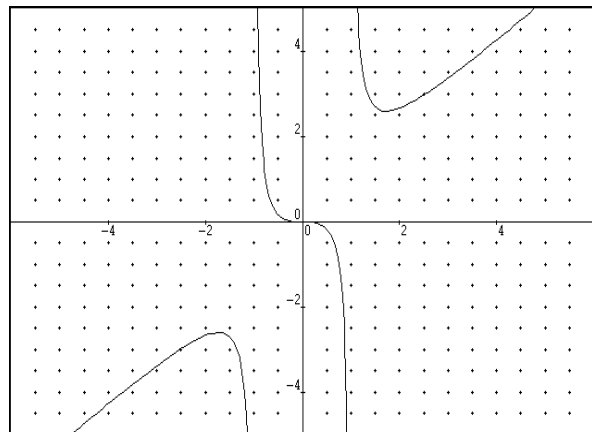
$$y = \frac{6x}{x^2 + 1}$$



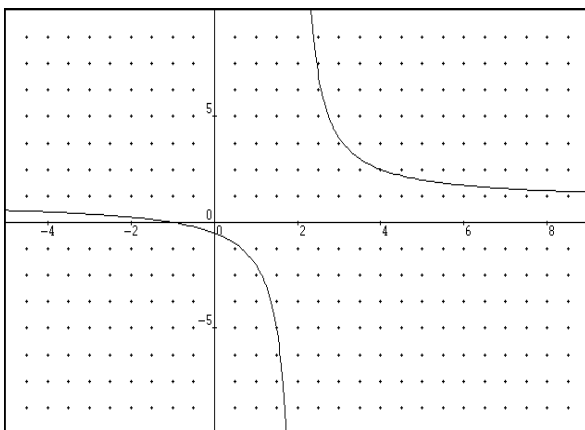
$$y = \frac{x^2 + 9}{x^2 - 4}$$



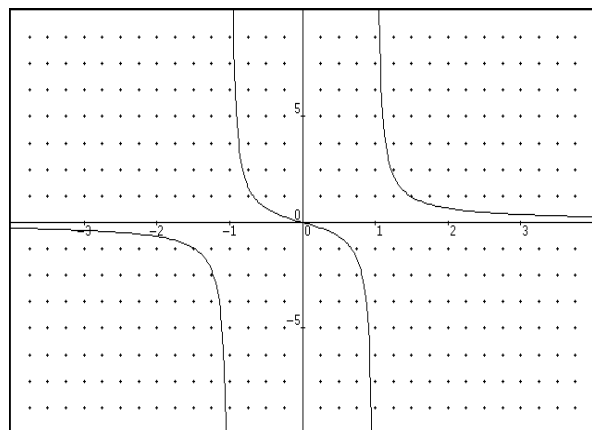
$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$



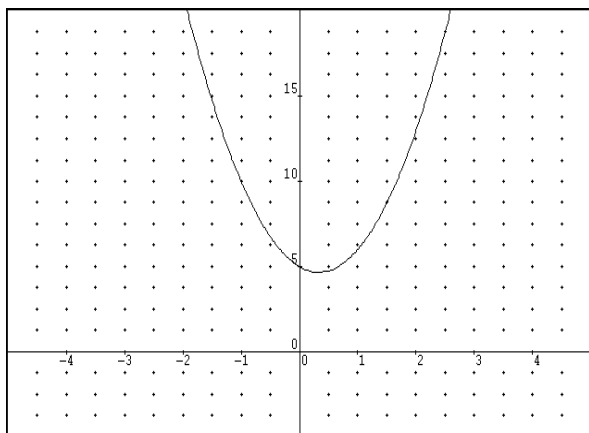
$$y = \frac{x + 1}{x - 2}$$



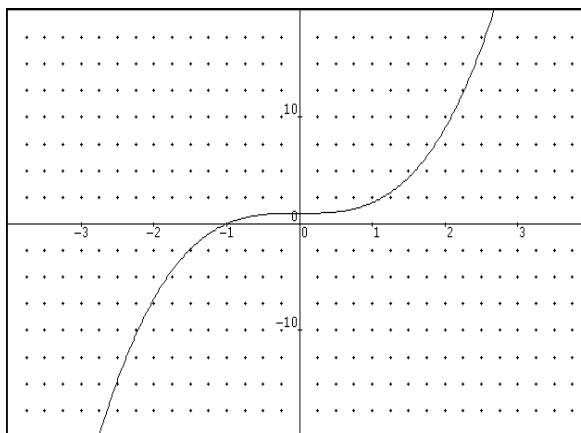
$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$



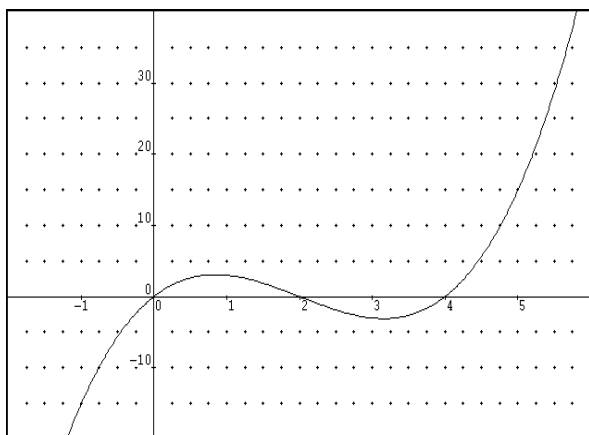
$$y=3x^2-2x+5$$



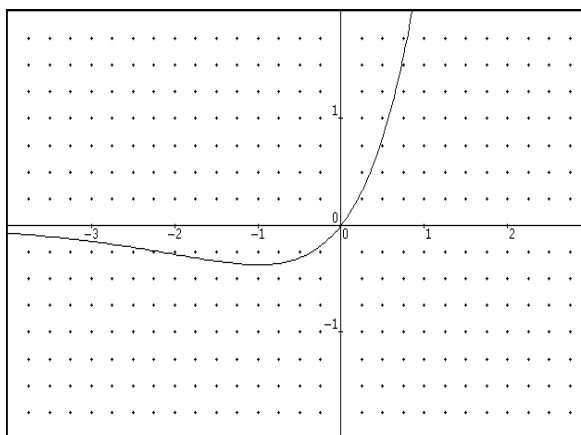
$$y=x^3+1$$



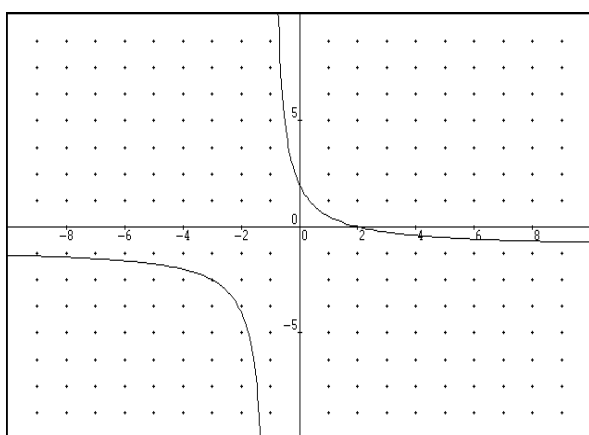
$$y=x^3-6x^2+8x$$



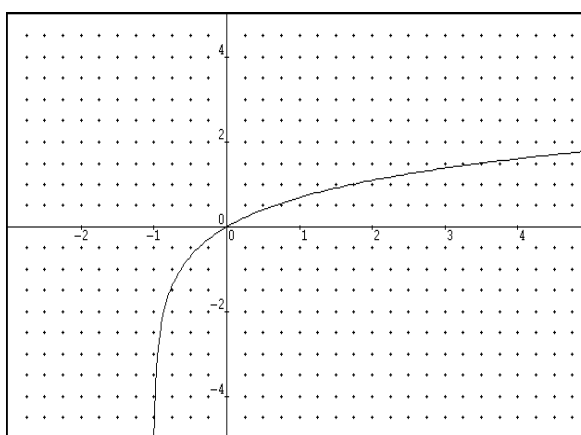
$$y=x.e^x$$



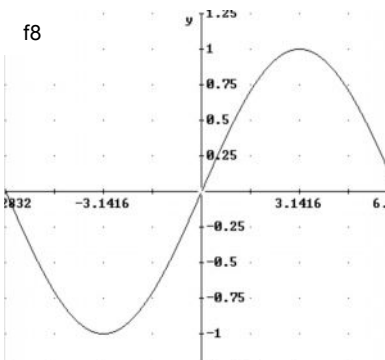
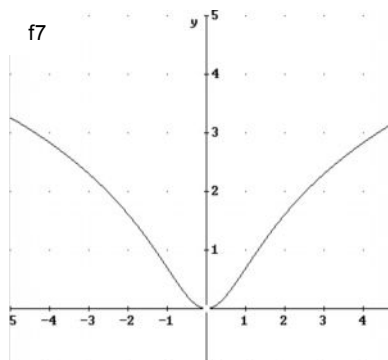
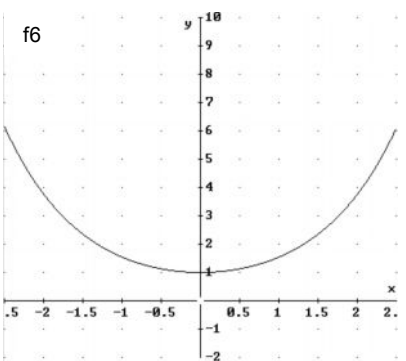
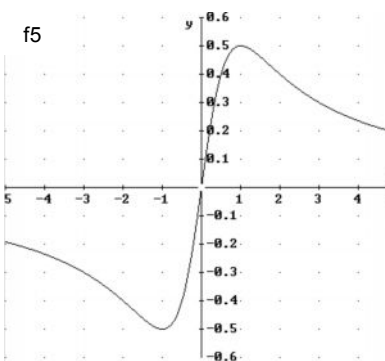
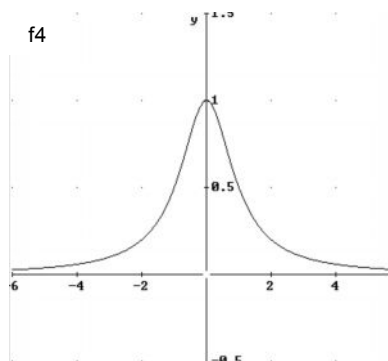
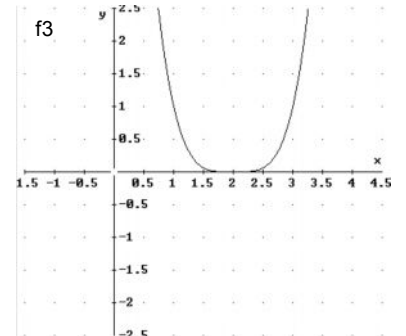
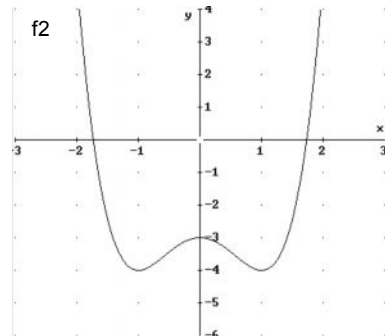
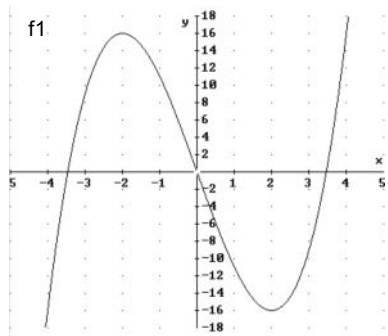
$$y=\frac{2-x}{x+1}$$



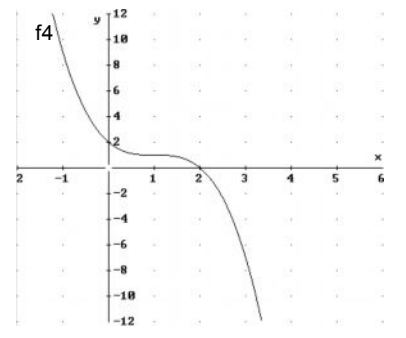
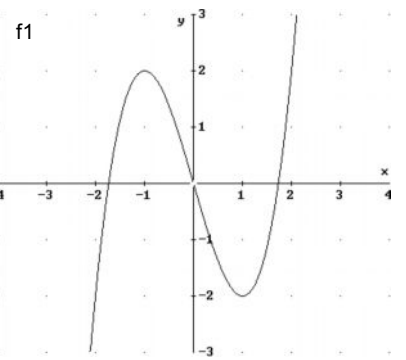
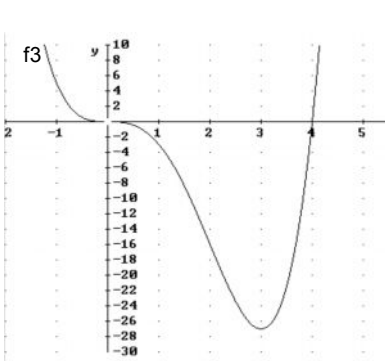
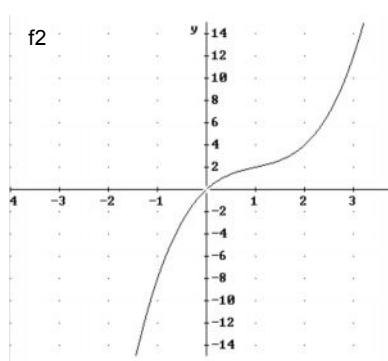
$$y=\ln(x+1)$$



1.  $f_1(x)=x^3-12x$        $f_2(x)=x^4-2x^2-3$        $f_3(x)=(2-x)^4$        $f_4(x)=\frac{1}{1+x^2}$   
 $f_5(x)=\frac{x}{x^2+1}$        $f_6(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$        $f_7(x)=\ln(x^2+1)$        $f_8(x)=\text{sen}(x/2)$



2.  $f_1(x)=x^3-3x$        $f_2(x)=x^3-3x^2+4x$        $f_3(x)=x^4-4x^3$        $f_4(x)=1-(x-1)^3$



3.

$$f_1(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$f_2(x) = \frac{x^2+1}{x}$$

$$f_3(x) = \frac{x^4}{x^2-4}$$

$$f_4(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$$

$$f_5(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$f_6(x) = \frac{\ln x}{x}$$

