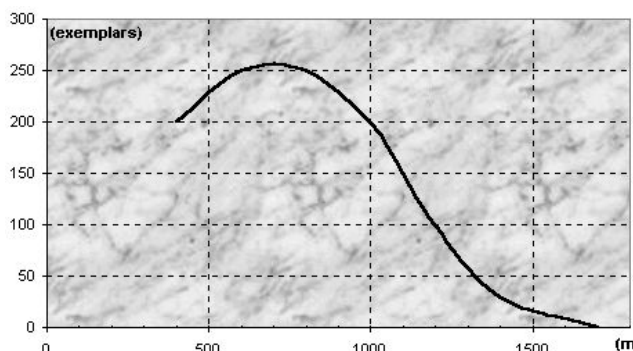


CONCEPTOS GENERALES (I) :

1. En una comarca hay una especie vegetal, se ha estudiado la cantidad media por hectárea que se puede encontrar a diferentes alturas.

- a) ¿Cuál es la cantidad media a 500 m? ¿Y a 1200 m?
- b) ¿Entre qué altitudes se encuentra la comarca estudiada?
- c) ¿A qué altura hay más ejemplares?
- d) Haz una descripción global de la función.



2. Indica cuánto cuesta dejar el coche 30 min, 2'5 h, 5 h y cuarto.

Representa gráficamente la variación del coste en función del tiempo.

Describe la función correspondiente.

APARCAMIENTO – Tabla de Precios

- 1ª hora Gratuito
 - 2ª hora 0'5 €
 - 3ª hora 1 €
 - 4ª hora o más ... 2 € más por hora
- Tiempo máximo 10 horas

Una función $f(x)$ es cualquier relación entre dos variables "x" e "y", de manera que para cualquier valor de la variable independiente (x) se obtiene un único valor de la variable dependiente (y).

• ej: "El precio de un kilo de naranjas es de 90 céntimos de €"

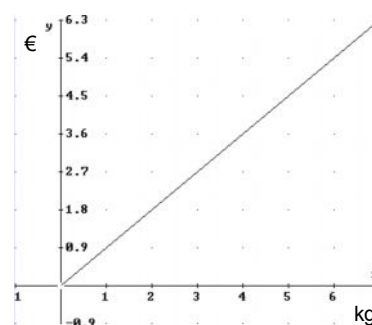
La variable independiente (x) es el peso, y la dependiente el precio (y)

Si hacemos una pequeña tabla de valores

Kilos (x)	1	2	4	6	x
Euros (y)	0'9	1'8	3'6	5'4	0'9·x

La función que relaciona las variables es $y=0'90 \cdot x$

La gráfica correspondiente es ésta.



Llamamos Dominio de una función, al conjunto de valores de la variable independiente (x) que hace que la función pueda existir.

ej: En el ejemplo anterior, el dominio son todos los números reales positivos $[0, +\infty[$, luego los kilos no pueden tomar valores negativos.

Si la función fuera un polinomio, del tipo $y=x^3-3x^2+x-6$ existe para cualquier valor de la variable independiente x, por tanto su dominio será $]-\infty, +\infty[$.

Si la función es un cociente de polinomios, del tipo $y = \frac{5x}{x^2 - 1}$, existirá siempre que su denominador no sea cero, ya que entonces no existiría la función, por tanto los únicos valores que hacen imposible la función son los que anulan el denominador $x = -1$ y $x = +1$; luego el dominio será $\mathbb{R} \sim \{-1, +1\}$.

Si la función fuera una raíz de índice par, del tipo $y = \sqrt{x-5}$, ésta existe siempre que $x-5 \geq 0$, por tanto $x \geq 5$; entonces el dominio será el intervalo $[5, +\infty[$.

3. Calcula el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \frac{1}{x+7}$

b) $y = \frac{1}{x^2 + 2x - 8}$

c) $y = \sqrt{x-5}$

d) $y = \sqrt{x+3}$

e) $y = \frac{6}{5x-15}$

f) $y = \frac{10-x}{4x-x^2}$

g) $y = \sqrt{2-x}$

h) $y = \sqrt{-x}$

i) $y = \frac{4x}{9-x^2}$

j) $y = \frac{2-x}{x^2+1}$

k) $y = \sqrt{x^2+1}$

l) $y = \sqrt[3]{2x}$

m) $y = \sqrt{4-x^2}$

n) $y = \sqrt{x^2-9}$

o) $y = \sqrt{2x^2-5x}$

p) $y = \sqrt{-x^2+2x+3}$

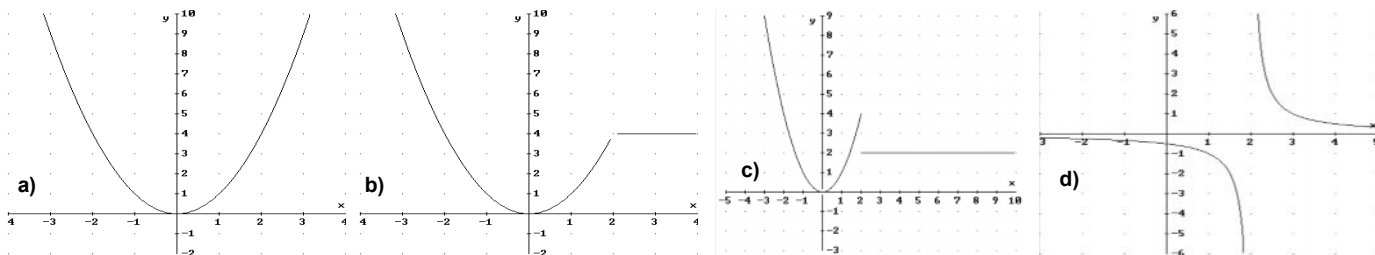
q) $y = \frac{5}{\sqrt{x+2}}$

r) $y = \frac{-2x}{\sqrt{12-3x}}$

s) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{2x-10}$

t) $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}}$

4. Observa las siguientes funciones y analiza por qué son discontinuas algunas de ellas.



Una función $f(x)$ es continua en un punto $x=a$ si se dan las siguientes condiciones:

Existe la función en el punto $x=a$ $\exists f(a)$

Existen los límites laterales (izquierda y derecha) de la función en el punto $x=a$, $\exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Los tres resultados anteriores son iguales $f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

• ej: En el ejercicio 4,

La función a) se ve que es toda continua

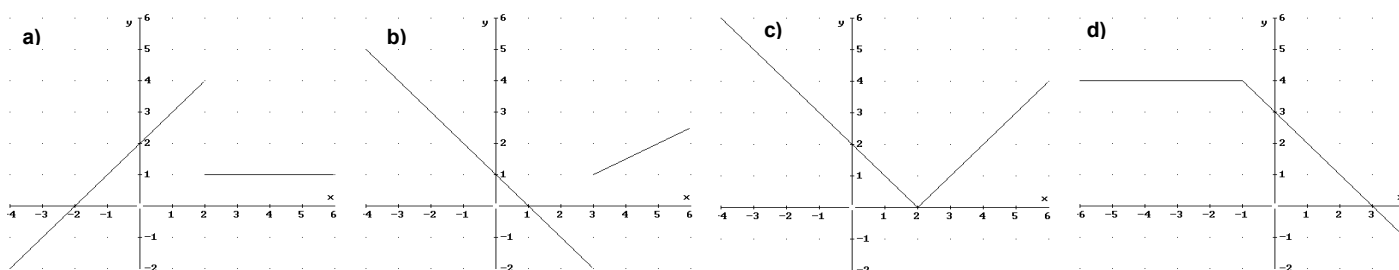
La función b) no está definida en $x=2$, por tanto es discontinua de tipo evitable

En la función c) no coinciden los límites laterales, aunque existen, es discontinua de tipo inevitable de salto finito.

En la función d), los límites laterales van hacia el infinito, es discontinua de tipo inevitable de salto infinito.

5. Calcula la expresión analítica de las funciones y analiza los posibles puntos de discontinuidad.

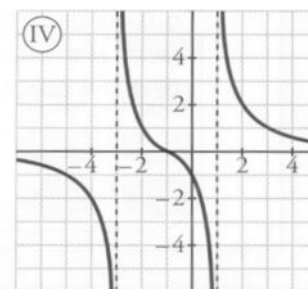
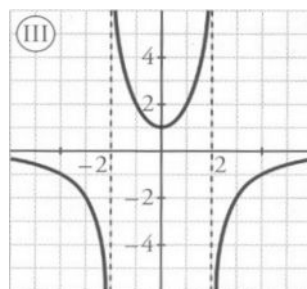
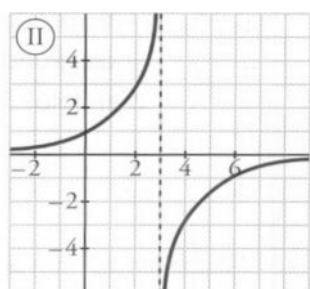
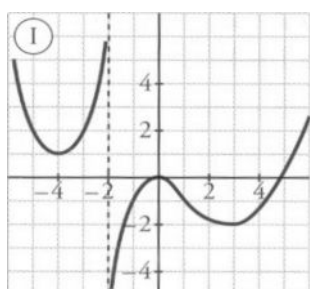
6. Analiza los puntos de discontinuidad e indica cuál es su dominio.



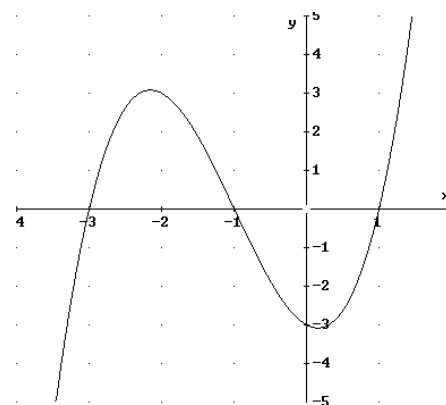
a) ¿Tienen extremos relativos? (máximos y mínimos relativos)

b) ¿Cortan a los ejes?

c) Describe los intervalos de monotonía (crecimiento y decrecimiento)



7. ¿Cuál es el dominio de definición?
 ¿Cuáles son sus extremos relativos?
 ¿Dónde corta a los ejes?
 ¿Cuáles son sus intervalos de monotonía?



FUNCIONES LINEALES

8. Pau trabaja como representante en la venta de televisores y tiene un sueldo mensual de 400 € fijos más 80 € por cada televisor vendido; mientras que su hermana María trabaja como gerente de la misma empresa con un sueldo fijo de 1200 €/mes. Escribe la expresión matemática que daría el sueldo mensual de cada uno, representándolas gráficamente y, analiza quién cobra más al finalizar cada mes.

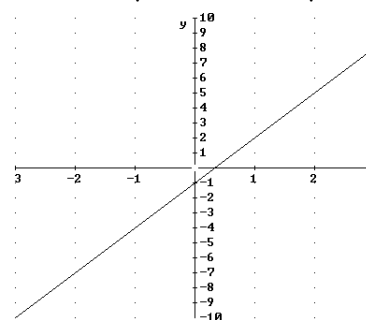
Una función Lineal tiene como expresión matemática un polinomio de primer grado $y=mx+n$, gráficamente son rectas.

n = ordenada en el origen, es el punto donde corta al eje de ordenadas.

m = pendiente, indica la inclinación que tiene la recta, el aumento de la variable dependiente respecto de la variable independiente.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

- ej: si miramos la gráfica de la función $y=3x-1$ se observa que corta al eje OY en el punto $(0,-1) \rightarrow n= -1$ también se puede ver que por cada unidad que crece la x , la y crece 3 unidades $\rightarrow m= 3$



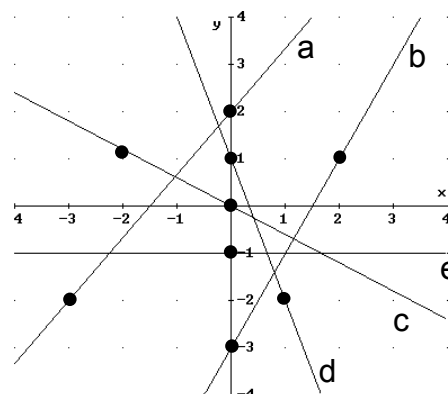
9. Indica cuáles son las pendientes de las siguientes rectas y las ordenadas en el origen, representálas gráficamente:

- a) $y=2x-3$ b) $y=\frac{2}{3}x+2$ c) $y=\frac{-1}{4}x+5$ d) $y=-3x-1$

¿Qué se puede deducir sobre la monotonía (crecimiento o decrecimiento) de las funciones Lineales, según el signo de sus pendientes?

10. Indica las pendientes, las ordenadas en el origen y las ecuaciones respectivas:

- a) $m=$ $n=$ $y=$
 b) $m=$ $n=$ $y=$
 c) $m=$ $n=$ $y=$
 d) $m=$ $n=$ $y=$
 e) $m=$ $n=$ $y=$



11. Dibuja las rectas que pasan por los puntos indicados, deduciendo cuáles son sus pendientes, obtén sus ecuaciones y deduce la ordenada en el origen:

- a) A(3,1) B(7,5) b) A(3,5) B(7,-2) c) A(3,-2) B(7,8) d) A(1,-5) B(10,11)

12. Un móvil, en el instante inicial, se encuentra a 3 m del origen y se aleja a una velocidad de 2 m/s. Calcula la ecuación de su posición en función del tiempo y represéntala gráficamente.

13. Un móvil que inicialmente llevaba una velocidad de 8 m/s frena con una aceleración de -1 m/s^2 . Escribe la ecuación de la velocidad en función del tiempo y represéntala gráficamente.

14. Representa las funciones siguientes e indica qué tienen en común todas ellas.

- a) $y=2x$ b) $y=\frac{2}{3}x$ c) $y=\frac{-1}{4}x$ d) $y=\frac{-7}{3}x$

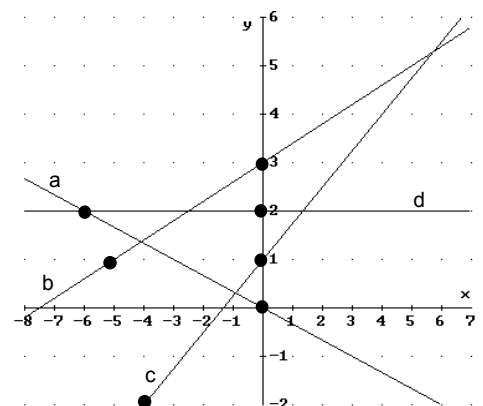
15. Representa gráficamente las funciones: $y=3$ $y=-2$ $y=0$ $y=-5$

16. Indica cuáles son las pendientes de las siguientes rectas y las ordenadas en el origen, represéntalas gráficamente:

- a) $y=3x-5$ b) $y=3$ c) $y=\frac{2x+3}{5}$ d) $y=x+5$ e) $x-2y+4=0$

17. Calcula las pendientes, las ordenadas en el origen y las ecuaciones respectivas:

- a) $m=$ $n=$ $y=$
 b) $m=$ $n=$ $y=$
 c) $m=$ $n=$ $y=$
 d) $m=$ $n=$ $y=$



18. Una fábrica (A) cobra 8 € por cada pieza que fabrica de una máquina, pero además se han de añadir unos gastos fijos de 12000 €, independientemente del número de piezas fabricadas.

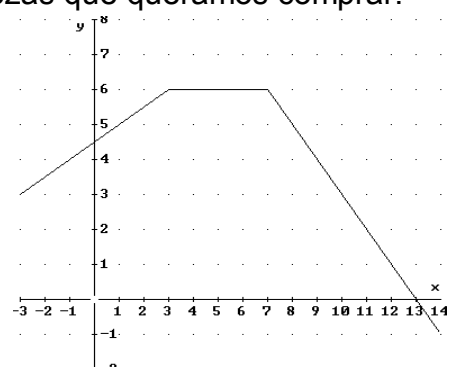
Una segunda fábrica (B), cobra únicamente 24000 € fijos, sin tener en cuenta las piezas fabricadas.

Una tercera fábrica (C), cobra 20 € por pieza fabricada, sin ningún gasto más.

- a) En cada fábrica, ¿cuánto cuesta fabricar mil piezas? ¿Y dos mil? ¿Y cien piezas?
 b) ¿Qué funciones nos dan los precios de fabricación a partir del número de piezas?
 c) Represéntalas gráficamente sobre los mismos ejes.
 d) Deducir qué fábrica interesa elegir, según el número de piezas que queramos comprar.

FUNCIONES A TROZOS

19. Escribe la ecuación que corresponde a este gráfico y comenta su continuidad.



20. Enviar una carta con destino la misma provincia desde la que se remite, cuesta 0'40 €, siempre que el peso de la carta no supere los 20 g. Si excede este peso, el precio es de 0'50 € para cartas de hasta 50 g, y de 0'70 € desde 50 g hasta 100 g. Escribe la función matemática que describe el caso anterior y representala gráficamente.

Este tipo de función, que se comporta de maneras diferentes según el intervalo donde esté definida, recibe el nombre de función a Trozos o función a Tramos. Si además todos los trozos son constantes (horizontales) la función se llama Escalonada.

21. Representa las funciones $f(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x \leq 0 \\ x-3 & \text{si } 0 < x < 5, \\ 3 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ 3x-5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

analizando su continuidad.

22. En las llamadas interurbanas, el tiempo que dura cada paso del contador depende de la hora de la llamada.

De les 8h a les 14h 12 segons
De les 14h a les 20h 18 segons
De les 20h a les 8h 24 segons

- Representa la función que da la duración del paso del contador según la hora de la llamada para un día entero.
- Busca la expresión analítica de esta función.

23. El precio de un aparcamiento es de 60 céntimos de € la primera hora o fracción, 90 céntimos la segunda hora o fracción y 1 € más por cada hora o fracción de más, hasta un máximo de 10 € diarios. Dibuja la gráfica que describe la relación precio-tiempo y escribe su expresión analítica.

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Son aquellas que tienen como expresión analítica un polinomio de segundo grado, $y = ax^2 + bx + c$, gráficamente son parábolas.

Si $a > 0$ → tiene una orientación del tipo \cup (cóncava)

Si $a < 0$ → tiene una orientación del tipo \cap (convexa)

El punto máximo o mínimo de la función, dependiendo del signo del parámetro a, se llama vértice. Para calcular su abscisa $V_x = -b/2a$, para calcular su ordenada, sustituiremos en la función dicho valor.

Corte con el eje OY → $x=0$ → $y=0+0+c=c$ → (0,c) el término independiente indica donde corta el eje de ordenadas.

Cortes con el eje OX → $y=0$ → tendremos que resolver la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$

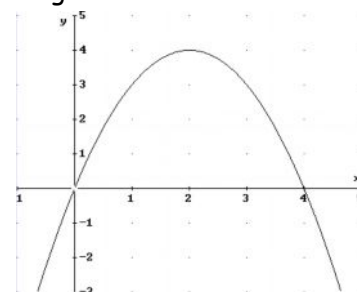
ej: analizar y representar la función Cuadrática $y = -x^2 + 4x$

Vértice → $V_x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$ → $V_y = -4 + 8 = 4$ → $V(2,4)$

Corte con el eje OY → $x=0$ → $y = -0^2 + 4 \cdot 0 = 0$ → (0,0)

Cortes con el eje OX → $y=0$ → $-x^2 + 4x = 0$ → $x=0$ y $x=4$
(0,0) y (4,0)

Ya que $a = -1$ → tiene una orientación convexa \cap



24. Si lanzamos verticalmente hacia arriba una piedra, ésta sube hasta un cierto punto y después comienza a caer. La relación entre el tiempo (t) que la piedra lleva en el aire cuando se encuentra a una altura (y) viene dada por la relación $y = -5t^2 + 20t + 10$. ¿Cuándo llega a la altura máxima y cuál es ésta? ¿Cuánto tarda en tocar el suelo? ¿Desde qué altura se lanzó? Representala gráficamente.

25. Representa gráficamente las siguientes parábolas, analizando previamente cuál es su vértice, cortes con los ejes cartesianos y orientación.

a) $y=x^2-2x+3$ b) $y=-x^2+6x-5$ c) $y=2x^2-10x+8$ d) $y=-\frac{1}{4}x^2-x+2$

26. Resuelve analítica y gráficamente el sistema de ecuaciones $\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = x - 5 \end{cases}$

27. Representa gráficamente la siguiente función a trozos $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 16 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

28. Con una cuerda de 1 m anudada en sus extremos se construyen distintos rectángulos.

a) Construye una tabla que relacione la base de cada rectángulo con su superficie.

base (cm)	0	10	20	30	40	50	x
altura (cm)							
área (cm ²)							

- b) ¿Qué superficie tendrán los rectángulos de 5, 35, y 57 cm de base?
- b) ¿Cuál será el área si la base es de x cm?
- c) Representa gráficamente la función anterior
- d) ¿Qué dimensiones tiene el rectángulo de área máxima, o mínima; ¿cuál será ésta?

29. El 10 de mayo de 1995 el Real Zaragoza ganó la Recopa de Europa de fútbol gracias a un gol de Nayim, desde más de 40 metros, en el último minuto de la prórroga.

El balón describió una parábola y la ecuación que relaciona la altura alcanzada (metros) por el balón respecto del tiempo (segundos) transcurrido fue, más o menos, esta: $y = -13t^2 + 39t + 0.5$.

- a) ¿En qué momento alcanzó el balón la máxima altura y cuál fue ésta?
- b) ¿A qué altura estaba el balón cuando lo golpeó Nayim, y cuanto tiempo tardó el balón en volver a tocar el suelo?
- c) Representa gráficamente la función anterior.

30. Representa gráficamente las siguientes parábolas, analizando previamente cuál es su vértice, cortes con los ejes cartesianos y su orientación.

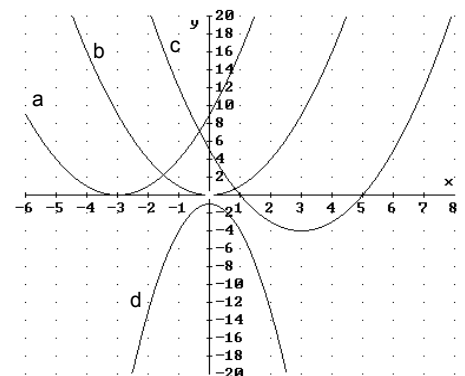
a) $y=2x^2$ b) $y=-x^2$ c) $y=-2x^2$ d) $y=0.5x^2$
 e) $y=-x^2+2$ f) $y=x^2+3$ g) $y=-0.75x^2-1$ h) $y=x^2-4$
 i) $y=x^2-4x$ j) $y=-2x^2-8x$ k) $y=-10x^2-100x$ l) $y=0.002x^2-0.04x$

31. Asocia a cada uno de los gráficos una de las expresiones siguientes:

$y=x^2$ $y=x^2-6x+5$ $y=(x+3)^2$ $y=-3x^2-1$

32. La altura, h, donde se encuentra en cada instante, t, un proyectil que lanzamos verticalmente con una velocidad de 500 m/s es $h(t)=500t-5t^2$

- a) ¿En qué instante alcanza la altura máxima? ¿Cuál es ésta?
- b) ¿Cuánto tiempo tarda en volver al suelo?
- c) Haz una representación gráfica del enunciado.
- d) ¿En qué intervalo de tiempo el proyectil se encuentra a una altura superior a los 4.500 metros?



33. Los gastos fijos mensuales (en €) de una empresa por la fabricación de n aparatos de DVD son $g(n)=40000+10n$, mientras que los ingresos (en €) mensuales por las ventas siguen la función $i(n)=60n-0'01n^2$.

- a) ¿Cuántos aparatos de DVD han de fabricar para que el beneficio (ingresos menos gastos) sea máximo?
- b) Dibuja las funciones $g(n)$ e $i(n)$ sobre los mismos ejes y comenta qué se deduce.
- c) Dibuja la función de beneficios $b(n)$ y comenta qué consecuencias se extraen.

34. Con 36 m de tela metálica queremos cercar un corral de forma rectangular.

- a) Si tiene una longitud de 10 m, ¿cuál es su anchura? ¿Y su superficie?
- b) Llena la siguiente tabla de valores:

largo (m)	0	2	5	8	10	12	14	16	18	x
ancho (m)										
superficie (m ²)										

- c) ¿Cuál será la superficie del corral si la longitud de x metros?
- d) Representa gráficamente la función que relaciona superficie con longitud.
- e) ¿Para qué valores de x la superficie es máxima? ¿Cuál es ésta?

35. Una empresa propone a Juan el siguiente contrato: un sueldo mínimo de 400 €/mes y 2 € por cada encuesta realizada. Juan estudia si le interesa dejar su anterior trabajo donde ganaba 1000 € fijos al mes; ayúdale a decidirse expresando el sueldo obtenido en cada empresa mediante una función matemática, represéntalas gráficamente y calcula cuántas encuestas al mes ha de realizar como mínimo para realizar el trabajo anterior.

36. Representa gráficamente la función que nos da el precio de una llamada telefónica en función del tiempo de llamada, sabiendo que el primer minuto cuesta 20 céntimos y cada tres minutos que pasan nos cuesta 15 céntimos más.

37. Un jugador de rugby golpea el balón de manera que éste describe una trayectoria que viene dada por la ecuación: $y = -5x^2 + 20x + 0.6$, donde y indica la altura alcanzada por el balón (en metros) y x los segundos que transcurren.

- a) Representa gráficamente la trayectoria del balón.
- b) ¿Cuánto tarda en alcanzar la altura máxima del balón? ¿Cuál es esta altura?
- c) ¿Cuánto tarda el balón en volver al suelo?
- d) ¿A qué altura estaba el balón cuando lo golpeó el jugador?

38. En 2006 se compra una empresa, cuyos ingresos (en miles de €) vienen dados cada año por la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$, mientras que los gastos (en miles de €) vienen dados cada año por la función $g(x) = -x + 3$

- a) ¿Cuántos ingresos y cuántos gastos había en el momento de la compra de la empresa?
- b) ¿En qué años fueron nulos los ingresos? ¿Y los gastos?
- c) ¿En qué año se produjeron unos ingresos mínimos? ¿A cuánto ascendieron?
- d) Representa gráficamente sobre los mismos ejes ambas funciones
- e) Si la empresa se vende en el año 2010, ¿cuál será el balance de la empresa en ese momento? (Balance = ingresos – gastos)
- f) ¿En qué año hubo un beneficio nulo? ¿Cuáles fueron los ingresos y los gastos en ese momento?