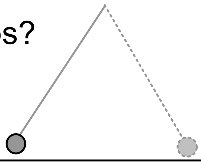
FUNCIONES RADICALES (IRRACIONALES)

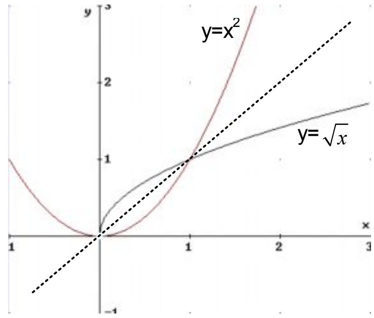
1. En un péndulo, el tiempo que tarda en cada oscilación (ida y vuelta) se llama periodo. Ese periodo (T en segundos) depende de la longitud (l en metros) del hilo, según la fórmula T=2$\sqrt{l}$.



a) ¿Qué ocurre si aumentamos la longitud del péndulo? ¿Y si la disminuimos?
b) ¿Qué tipos de valores puede tomar la longitud “l”?
c) Haz una tabla de valores y representa gráficamente la función anterior.

Las <u>funciones Radicales</u> o Irracionales se caracterizan porque la variable independiente (x) está bajo el símbolo de una raíz.

El caso más sencillo es y= $\sqrt{x}$
Crece, pero muy lentamente
Su dominio es el intervalo [0,+∞[
Corta a los ejes coordenados en el origen (0,0)
Gráficamente es <u>media parábola</u> girada 90º



Ya que es la función inversa de y=x^2, sus gráficas son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante (y=x).

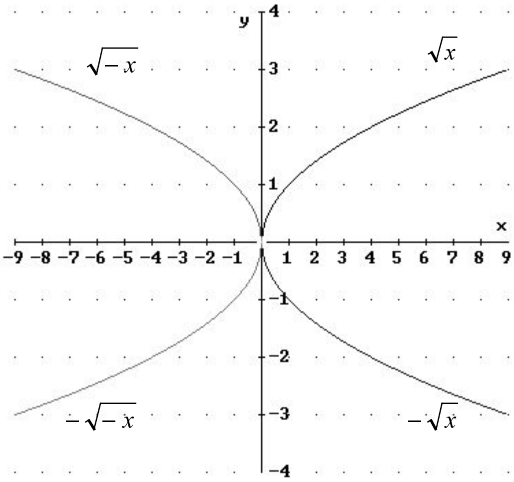
Variantes según los signos:

y= $\sqrt{x}$ → crece, dominio = [0,+∞[

y= $-\sqrt{x}$ → decrece, dominio = [0,+∞[

y= $\sqrt{-x}$ → decrece, dominio = [-∞,0[

y= $-\sqrt{-x}$ → crece, dominio = [-∞,0[



2. Representa gráficamente las siguientes funciones radicales: (traslaciones)

a) y=$\sqrt{x}$ y=$\sqrt{x+2}$ y=$\sqrt{x-3}$
b) y=$\sqrt{x}$ y=$\sqrt{x}$ +2 y=$\sqrt{x}$ -3

c) y=-$\sqrt{x}$ y=-$\sqrt{x+2}$ y=-$\sqrt{x-3}$
d) y=-$\sqrt{x}$ y=-$\sqrt{x}$ +2 y=-$\sqrt{x}$ -3

e) y=$\sqrt{-x}$ y=$\sqrt{-x+1}$ y=$\sqrt{-x-4}$
f) y=$\sqrt{-x}$ y=$\sqrt{-x}$ +5 y=$\sqrt{-x}$ -2
g) y=-$\sqrt{-x}$ y=-$\sqrt{-x+1}$ y=-$\sqrt{-x-4}$
h) y=-$\sqrt{-x}$ y=-$\sqrt{-x}$ +5 y=-$\sqrt{-x}$ -2

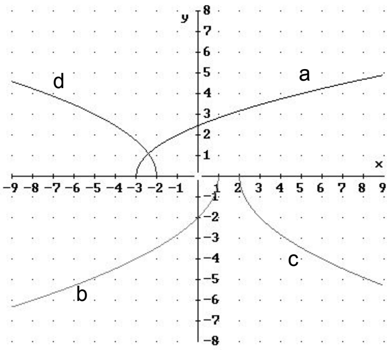
3. Identifica, razonadamente, las siguientes funciones:

I. $y=\sqrt{-3x-6}$

II. $y=-2\sqrt{x-2}$

III. $y=\sqrt{2x+6}$

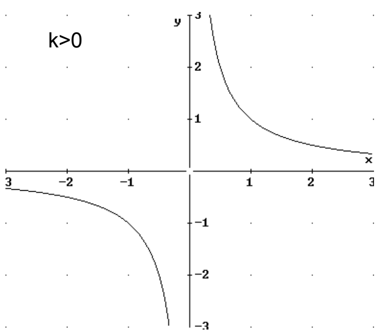
IV. $y=-\sqrt{-4x+4}$

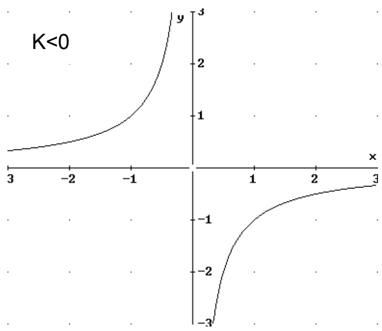


FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD INVERSA

4. Realizar un cierto trabajo de construcción requiere 16 jornadas, es decir: un obrero tardaría 16 días en realizarlo, dos obreros 8 días, etc. ¿Cuál es la función matemática que relaciona el tiempo en hacer el trabajo con el número de obreros que lo realizan? ¿Cuánto tardarían 24 obreros en acabar la obra? Representa gráficamente la función como si fuera continua y observa su tendencia.

Las funciones de Proporcionalidad Inversa se caracterizan porque la variable independiente está en el denominador de una fracción, son del tipo $y=\dfrac{k}{x}$, donde $k\in\mathbb{R}$. Gráficamente son hipérbolas.





Si k>0 → f(x) decrece
Si k<0 → f(x) crece
No corta a los ejes cartesianos
Dominio: $\mathbb{R}\sim\{0\}$ ya que no existe cuando se anula el denominador
Los ejes de coordenadas y=0 y x=0, son asíntotas horizontal y vertical, respectivamente.
(una asíntota es una recta hacia la cual se acerca una función en el infinito)

5. Representa gráficamente las funciones siguientes:

a) y=$\dfrac{8}{x}$ b) y=$\dfrac{-3}{x}$ c) y=$\dfrac{8}{x}$-3 d) y=$\dfrac{-3}{x}$+4 e) y=$\dfrac{8}{x+1}$

f) y= $\dfrac{-3}{x+2}$ g) y=$\dfrac{8}{x-3}-1$ h) y= $\dfrac{-3}{x-5}+2$ i) y= $\dfrac{4x+3}{x-1}$ j) y= $\dfrac{-5x+18}{x+4}$

6. Las ventanas de un edificio de oficinas han de tener 2 m^2 de superficie.

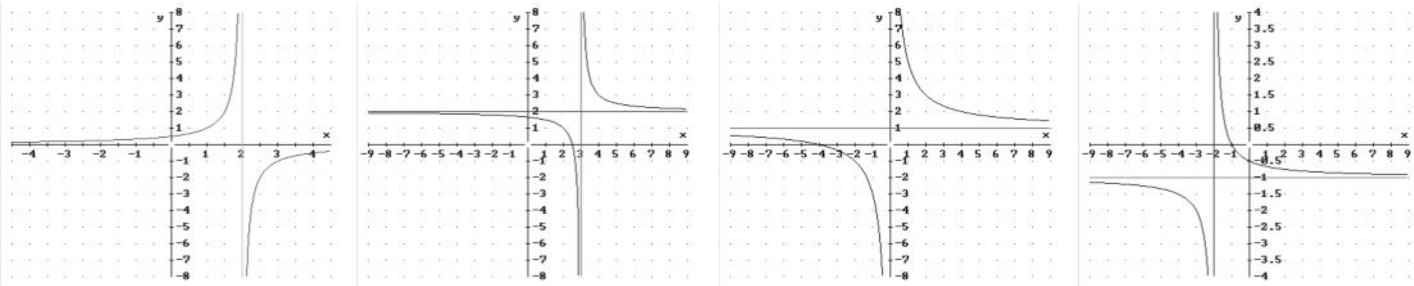
- Haz una tabla de cómo varía la altura de las ventanas según la longitud de la base.

base (m)	0'5	1	1'5	2	3	4	x
altura (m)							

- Representa la función que relaciona base y altura de las ventanas. Analízala.

7. Asocia a cada gráfico una de estas ecuaciones:

- a) $y=\dfrac{4}{x}+1$ b) $y=2+\dfrac{1}{x-3}$ c) $y=-1+\dfrac{1}{x+2}$ d) $y=\dfrac{-1}{x-2}$



8. Seguramente ya conoces las fórmulas que te dan la longitud de una circunferencia, el área de un círculo y el volumen de una esfera en función de su radio respectivo, si no es así, observa las siguientes tablas y dedúcelas:

radio	1	2	3	4	R
longitud circunferencia	2π	4π	6π	8π	
área círculo	π	4π	9π	16π	
volumen esfera	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{32}{3}\pi$	$\frac{108}{3}\pi$	$\frac{256}{3}\pi$	

- Escribe las funciones respectivas L= f(R), S= g(R) y V= h(R); dibújalas.

9. El coste de fabricación por unidad de unos adhesivos disminuye según el número de unidades fabricadas y viene dado por la función $y=\dfrac{0'5x+10}{x}$

- Haz el gráfico correspondiente. ¿Tiene sentido unir los puntos representados?
- ¿Cuál será el coste cuando el número de adhesivos sea muy elevado?

10. Tenemos 200 kg de naranjas que hoy se venderían a 0’40 €/kg. Cada día que pasa se estropea 1 kg y el precio aumente 0’01 €/kg.

- ¿Cuándo hemos de vender las naranjas para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será éste beneficio?

11. Completa la tabla y representa gráficamente las funciones siguientes, indicando previamente su dominio de definición, así como las posibles asíntotas y los intervalos de monotonía.

	Dom.	**Asínt.**	**Monot.**	x=-3	x=-2	x=-1	x=0	x=1	x=2
f_1(x)= $\frac{1}{x-1}$									
f_2(x)= $\frac{-3}{x-3}$									
f_3(x)= $\frac{-2x}{x+1}$									
f_4(x)= $\sqrt{x+2}$									
f_5(x)= $\sqrt{3x-3}$									
f_6(x)= $-\sqrt{2x-4}$									

CONCEPTOS GENERALES (II) : - OPERACIONES CON FUNCIONES -

12. Un grupo empresarial tiene dos compañías. La primera de ellas (A) pierde 10.000 €/año y la segunda (B) gana 30.000 €/año. Las dos empezaron sus actividades el mismo año, la primera con un capital de 310.000 € y la segunda con 70.000 €.

a) ¿Cuáles son las expresiones $f_1(x)$ y $f_2(x)$, de las funciones que dan el capital de ambas compañías según los años de funcionamiento? Represéntalas gráficamente.

b) ¿En cuánto tiempo pierde la compañía A todo su capital? ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que ambas compañías tengan el mismo capital?

c) Escribe la función $g_1(x)$ que da el capital del grupo empresarial a medida que pasa el tiempo, ¿qué relación tiene con las anteriores funciones? Represéntala gráficamente.

d) ¿Qué función $g_2(x)$ nos da la diferencia de capital entre la segunda (B) y la primera empresa (A) a lo largo del tiempo? Represéntala gráficamente.

e) Si el grupo empresarial crea un total de 4 empresas como la segunda (B), ¿qué función h(x) nos da el capital acumulado de estas 4 empresas? Represéntala gráficamente.

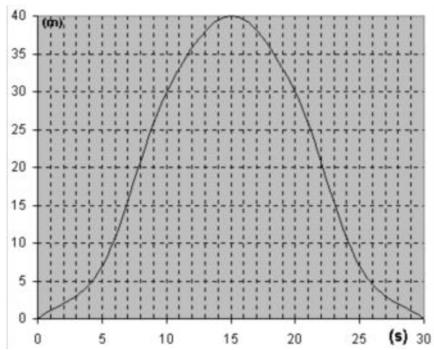
13. Una empresa tiene unos ingresos brutos a lo largo de los años que siguen una función del tipo $i(t)=0'5t^2$, con unos gastos que se adaptan a una función del tipo $g(t)=2t$.

a) Representa gráficamente ambas funciones.

b) ¿Qué función nos da los beneficios de la empresa a lo largo del tiempo, b(t)?

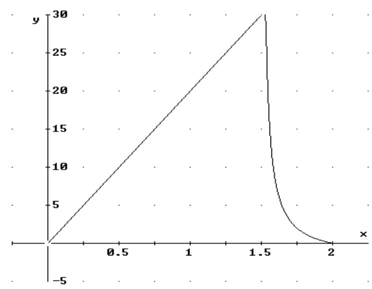
c) ¿En cuánto tiempo empezará a tener beneficios?

c) ¿Qué función h(t) nos indica a lo largo de los años, cuántas veces son mayores los ingresos que los gastos?



14. La gráfica adjunta representa la variación de altura de una cabina de una noria de feria cuando ésta da una vuelta. Este movimiento se repite continuamente.

a) ¿Cuál es el periodo de esta función?
b) Dibuja el gráfico correspondiente a 4 vueltas de la noria.
c) ¿A qué altura estará la cabina después de 2 minutos? ¿Y después de 105 segundos? ¿Y si el tiempo que ha pasado es de 200 segundos?



15. Una cisterna se llena y se vacía automáticamente cada dos minutos, siguiendo el ritmo del gráfico adjunto.

a) Dibuja el gráfico correspondiente a 6 minutos.
b) ¿Cuánta agua habrá en la cisterna en los instantes siguientes: 17 min, 40 min y 30 s, 1h 9 min y 30 s.
c) ¿En qué momentos hay 10 litros de agua?

> *A este tipo de función que se repite cada cierto intervalo de valores de la variable independiente (x) se le llama función periódica, la amplitud del intervalo de valores que se repite es su periodo.*

16. El precio de las patatas en la tierra es de 0'20 €/kg, pero los intermediarios suben en un 90% el precio de venta en los mercados.

a) ¿Cuánto cobra el agricultor por 10.000, 20.000, 30.000 kg de patatas? ¿Y por x kg?
b) ¿Cuánto le cuestan al consumidor 10, 20, 30 kg de patatas? ¿Y por x kg?
c) ¿Cómo se podría considerar la función x Kg $\rightarrow$ y € (PVP) como composición de funciones?

Si a un valor de la variable independiente (x_0) le aplico una función f(x), se transforma en $f(x_0)$. Si a este resultado le aplico una segunda función g(x), lo que obtengo es $g(f(x_0))$.

$$x_0 \xrightarrow{\quad f \quad} f(x_0) \xrightarrow{\quad g \quad} g(f(x_0))$$
$$\xrightarrow[\qquad (g\circ f)(x) \qquad]{}$$

Si yo quisiera saber el resultado final sin necesidad de calcular el valor intermedio, habría de obtener una función que directamente me diera ese resultado, se trata de la <u>función compuesta</u> ($g\circ f$)(x),
"f compuesta con g", g actúa sobre el resultado de f.

17. Dadas las siguientes funciones $f(x)=x^2+1$, $g(x)=\sqrt{x}$ y $h(x)=\dfrac{1}{x-1}$

- Calcula el valor de: g(4), f(2), f(3), h(10), h(3), g(1/2)
- Obtén las composiciones: (f∘g)(x), (g∘f)(x), (h∘f)(x), (f∘h)(x), (g∘h)(x), (h∘g)(x)
- Calcula el valor de : (f∘g)(4), (g∘f)(0), (h∘f)(1), (f∘h)(2), (g∘h)(5), (h∘g)(0)

18. Dadas las siguientes funciones $f(x)=x^3$, $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$ y $h(x)=2+x$

- Obtén las composiciones: (f∘g)(x), (g∘f)(x), (h∘f)(x), (f∘h)(x), (g∘h)(x), (h∘g)(x)

19. A partir de las funciones $f_1(x)=x^2$, $g_1(x)=\sqrt{x}$ y $f_2(x)=3x+1$ $g_2(x)=\dfrac{x-1}{3}$

Obtén las composiciones: $f_1\circ g_1$, $g_1\circ f_1$ y $f_2\circ g_2$, $g_2\circ f_2$

Una función, $f^{-1}(x)$, es <u>función Inversa</u> de f(x) si $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=x$
En el ejercicio anterior, $f_1(x)$ y $g_1(x)$ son inversas entre sí, de la misma manera que lo son $f_2(x)$ y $g_2(x)$.
Para calcular la inversa de y=f(x), despejamos la variable independiente (x) y después, intercambiaremos el nombre de las variables.

- ej: calculamos la función Inversa de y=f(x)=3x−1 si despejo la x → 3x=y+1 → $x=\dfrac{y+1}{3}$

intercambiamos sus nombres → $y=\dfrac{x+1}{3}=f^{-1}(x)$ que es la Inversa de y=f(x)

si lo comprobamos → $\left(f\circ f^{-1}\right)(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=f\left(\dfrac{x+1}{3}\right)=3\cdot\dfrac{x+1}{3}-1=x+1-1=x$

de la misma manera → $\left(f^{-1}\circ f\right)(x)=f^{-1}\left(f(x)\right)=f^{-1}(3x-1)=\dfrac{3x-1+1}{3}=\dfrac{3x}{3}=x$

20. Encuentra las funciones recíprocas (Inversas) y comprueba, posteriormente, los resultados obtenidos

$f(x)=7x^2-5$, $g(x)=\dfrac{5}{4-6x}$ i $h(x)=\sqrt{2-3x^3}$

21. En una empresa han conseguido fabricar unas placas solares para calentar agua de manera que la temperatura del agua (T) depende del grosor de la placa (G). La función que relaciona temperatura y grosor es: $T=\dfrac{70\cdot G-1}{G}$

- ¿Cuál es la función que nos da el grosor en función de la temperatura?
- Representa gráficamente ambas funciones y observa su simetría.

EJERCICIOS DE REPASO

FUNCIONES – CONCEPTOS GENERALES

1) Calcula los dominios de las siguientes funciones:

1) $f(x)=|2x+4|$ **2)** $f(x)=\dfrac{1}{x}$ **3)** $f(x)=\dfrac{2}{x+5}$

4) $f(x)=\dfrac{3x-6}{5x-2}$ **5)** $f(x)=\dfrac{3x+1}{x+2}$ **6)** $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

7) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-5x+6}$ **8)** $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2-3x+2}$ **9)** $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-7x+10}$

10) $f(x)=\sqrt{4-2x}$ **11)** $f(x)=\sqrt{-x^2+5x-6}$ **12)** $f(x)=\sqrt{x-5}$

13) $f(x)=\sqrt{2x-4}$ **14)** $f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$ **15)** $f(x)=\sqrt{4x-1}$

16) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+7}}{6-2x}$ **17)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2-6x+8}$ **18)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{2x-1}$

19) $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{4-2x}}$ **20)** $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x-5}}$ **21)** $f(x)=\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-16}}$

22) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$ **23)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$ **24)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x^2-4}}$

25) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-4}{x^2-9}}$ **26)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{x-4}}$ **27)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{-x^2+8x-12}{x-4}}$

28) $f(x)=\log(x^2-16)$ **29)** $f(x)=\log\dfrac{x-1}{x+1}$

2) De las funciones que se definen a continuación, indica si presentan alguna simetría, clasifícalas.

a) $f(x)=\left(x^2-1\right)^2$ **b)** $f(x)=x^9+3x^3$ **c)** $f(x)=(x-1)^3$

d) $f(x)=x^3-7x$ **e)** $f(x)=2x^3-4x^2+1$ **f)** $f(x)=x.|x|$

g) $f(x)=x^2.|x|$ **h)** $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x-1}$ **i)** $f(x)=\dfrac{x^2+2}{3x^3}$

3) Dadas las funciones $f(x)=2x+1$, $g(x)=3x^2+2$ y $h(x)=\sqrt[3]{x-1}$ determina la expresión explícita y el dominio de las funciones siguientes:

a) $f+g$ **b)** $f+g+h$ **c)** $2f-3g$

d) $f-2g+5h^3$ **e)** $f\cdot g$ **f)** $f\cdot g\cdot h$

g) $f\cdot(2g+3h)$ **h)** f/g **i)** $1/h$

4) Dadas las funciones $f(x)=\sqrt{x^2-4}$, $g(x)=\dfrac{1}{x+2}$ y $h(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ determina la expresión explícita y el dominio de las funciones siguientes:

a) $f+g$ **b)** $g\cdot h$ **c)** $f\cdot g$ **d)** $(f+g)\cdot h$

5) Obtén la composición que se pide entre las siguientes funciones:

1.- $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2}$ $\quad g(x)=\dfrac{\sqrt{x+7}}{6-2x}$ obtén $g\circ f$

2.- $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}$ $\quad g(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ obtén $g\circ f$

3.- $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2}$ $\quad g(x)=5x-3$ obtén $f\circ g$ y $g\circ f$

4.- $f(x)=\ln x$ $\quad g(x)=x^2-2$ obtén $g\circ f(1)$ y $f\circ g(x)$

5.- $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-4}}$ $\quad g(x)=3x+1$ obtén $f\circ g(6)$, $g\circ f(8)$ y $f\circ g(x)$

6.- $f(x)=x-2$, $\quad g(x)=\sqrt{x+3}$ $\quad h(x)=\dfrac{2x}{x^3+1}$ obtén $f\circ g$, $h\circ g$ y $(h\circ g)\circ f$

7.- $f(x)=\dfrac{1}{x+3}$ $\quad g(x)=3^x$ $\quad h(x)=\sqrt{5-x}$ obtén $f\circ h(4)$, $h\circ g\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f\circ g$ y $g\circ f$

6) Obtén las funciones recíprocas de las siguientes. Compruébalo.

a) $f(x)=3x+1$ **b)** $f(x)=2x-3$ **c)** $f(x)=x^3+7$ **d)** $f(x)=x^2+2x+1$

e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ **f)** $f(x)=\dfrac{7x+1}{x}$ **g)** $f(x)=\dfrac{x+3}{x-5}$ **h)** $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+1}$

i) $f(x)=\sqrt{2x-1}$ **j)** $f(x)=\sqrt{4-2x}$ **k)** $f(x)=\sqrt{3x+5}$ **l)** $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$

7) Dadas las funciones $f(x)=\sqrt{4-2x}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$

a) Obtén los puntos donde ambas funciones cortan a los ejes cartesianos.
b) Calcula el dominio de definición de ambas funciones.
c) Obtén la función $f\circ g$
d) Obtén sus funciones recíprocas y haz las comprobaciones oportunas.
e) Representa gráficamente la función f(x)

8) Dadas las siguientes parejas de funciones:

a) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$ y $g(x)=\dfrac{x^2}{x^2+9}$ **b)** $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ y $g(x)=\dfrac{4x^2}{16-x^2}$ **c)** $f(x)=\sqrt{5-x}$ y $g(x)=\dfrac{x^4}{5-x^2}$

- Obtén los dominios de todas ellas
- Obtén la función ($g\circ f$)(x)
- Calcula la función recíproca de f(X)