

FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

1. Si en un medio de cultivo adecuado sembramos una cantidad de la bacteria "Salmonella tympihurium", productora de una gran cantidad de intoxicaciones alimentarias, observamos que necesita una hora para que se duplique.

a) Si comenzamos con una única célula de la citada bacteria, ¿cuántas habrá después de 2, 3, 4,, x horas? Completa la siguiente tabla:

tiempo (horas)	0	1	2	3	4	x
número células	1	2					

¿Cuántas horas han de pasar para que haya más de 100.000 células? ¿Y más de 1 millón?

Escribe la función $y=f(x)$ que relaciona el tiempo(x) con el número de células(y), obtenidas en ese cultivo y represéntala gráficamente.

b) Hay bacterias como la "Brucella melitensis", productora de la fiebre de Malta, tiene una reproducción más lenta que la de la Salmonella, tarda aproximadamente dos horas en dividirse. Si sembramos una célula, ¿cuántas habrá a las 24 horas? ¿Y después de 6 días?

Si sembramos 100 de estas bacterias, ¿cuántas habrá en 1 día? ¿Y si sembramos 300 bacterias?

c) El "Mycobacteiium tuberculosis", bacilo productor de la tuberculosis en el ser humano, es todavía más lento que las bacterias anteriores, tarda unas 4 horas en duplicarse. Si sembramos 1 célula de este bacilo, ¿cuántas habrá a los dos, tres y quince días, respectivamente?

¿Cuántos días habrán de transcurrir para que haya 16.384 células?

La función exponencial tiene la expresión analítica $y=a^x$, siendo $a>0$ y $a\neq 1$ por razones evidentes.

Si $a>1 \rightarrow f(x)$ es creciente

Si $a<1 \rightarrow f(x)$ es decreciente

Si $x=0 \rightarrow y=a^0=1 \rightarrow$ pasa por (0,1)

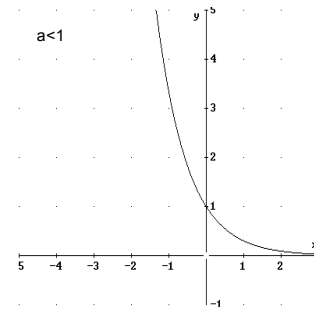
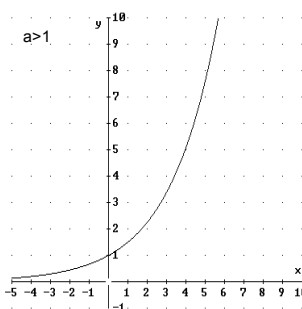
Si $x=1 \rightarrow y=a^1=a \rightarrow$ pasa por (1,a)

Ya que $a>0 \rightarrow f(x)>0$

Tienen el eje OX ($y=0$) como asíntota horizontal,

pues $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ si $a>1$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ si $a<1$

• ej: Analizar y dibujar las funciones exponenciales $y=2^x$ y $y=0.5^x$

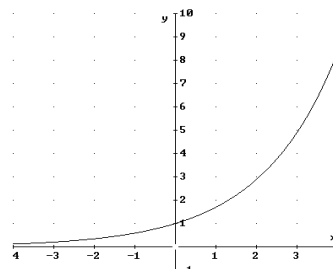
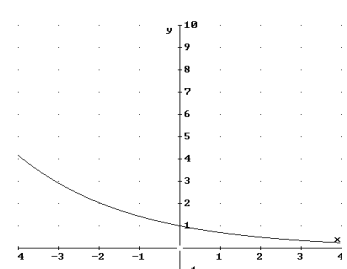
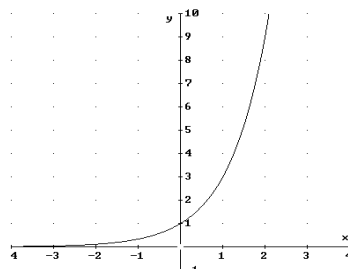
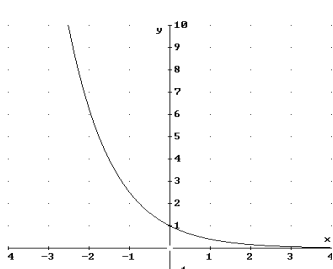


2. Haz un análisis y representa cada una de las siguientes funciones:

$y=1.5^x$ $y=0.8^x$ $y=2^{0.4x}$ $y=10^{0.01x}$ $y=1.01^{12x}$ $y=(1/2)^{x/28}$

3. Asocia cada una de las siguientes funciones a su gráfico correspondiente:

a) $y=3^x$ b) $y=1.7^x$ c) $y=0.4^x$ d) $y=0.7^x$



4. Jaume compró, ahora hace cinco años, un terreno. Sus amigos le dijeron que había hecho una buena inversión, pues en esa zona el precio de las parcelas se revaloriza un 20% cada año. En la actualidad podría vender el terreno por 100.000 €.

- a) ¿Cuánto le costó a Jaume?
- b) ¿Por cuánto lo podría vender el año que viene? ¿Y dentro de cuatro años?
- c) ¿Cuánto le habrían dado hace dos años? ¿Y hace cuatro años?
- d) Completa la taula

años	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	x
valor(€)					10 ⁵						

- e) Escribe y representa gráficamente la función por la que se obtiene el valor del terreno según el número de años transcurridos.
- f) ¿Dentro de cuánto tiempo podrá vender el terreno por unos 200.000 €?
- g) ¿Cuánto hace que dicho terreno tenía un valor aproximado de 10.000 €?

5. El gráfico de una función exponencial del tipo $y=k \cdot a^x$ pasa por los puntos (0,2) y (1,1'8).

- Calcula los valores de los parámetros "k" y "a".
- Analiza la función y representala gráficamente.

6. Se llama inflación a la pérdida de valor del dinero, por tanto el porcentaje de subida de los precios. Suponemos un país como España donde la inflación sea del 3% anual, ¿cuánto costará dentro de 5 años un coche que hoy cuesta 12.500 €? ¿Cuál era el precio de ese mismo coche hace 2 años?

7. David lanza una pelota desde 60 metros de altura y ésta rebota cada vez hasta la mitad de la altura alcanzada anteriormente.

- a) ¿Qué altura alcanzará después del segundo bote? ¿Y después de seis botes?
- b) Completa la tabla:

número de botes	1	2	3	4	5	6	..	x
altura (m)	30							

- c) Escribe la función que da la altura donde llega la pelota según el número de botes que da. ¿Cuál es su dominio? Representala gráficamente.
- d) ¿Cuántos botes habrá dado si está a 3'75 m del suelo?
- e) ¿Cuántos botes tendrá que dar para que en el siguiente no llegue a los 30 cm de altura?

Logaritmo en base "a" de un número "x", $\log_a(x)=b$ si $a^b=x$, siendo $a>0$

• ej: $\log_2(8)=3$ ya que $2^3=8$

$$\log_3(81)=4 \text{ pues } 3^4=81$$

$$\log_5(25)=2 \text{ ya que } 5^2=25$$

$$\log_2(0'5)=\log_2(1/2)=-1 \text{ pues } 2^{-1}=1/2$$

La función logarítmica, $y=\log_a(x)$; $a>0$ y $a\neq 1$

Su dominio es $]0,+\infty[$

Si $a>1 \rightarrow f(x)$ es creciente

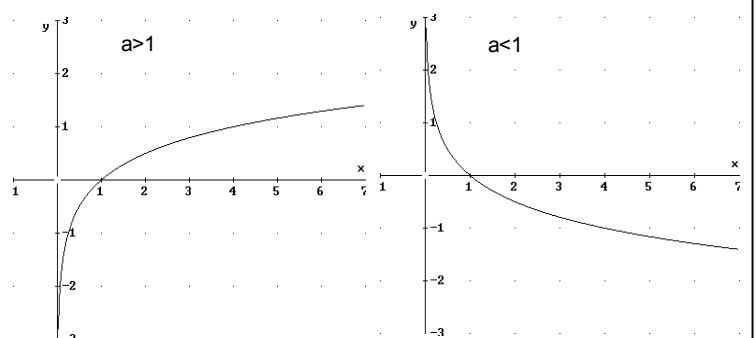
Si $a<1 \rightarrow f(x)$ es decreciente

Si $x=1 \rightarrow y=\log_a(1)=0 \rightarrow$ pasa por (1,0)

Si $x=a \rightarrow y=\log_a(a)=1 \rightarrow$ pasa por (a,1)

Tienen el eje OY ($x=0$) como asíntota vertical,

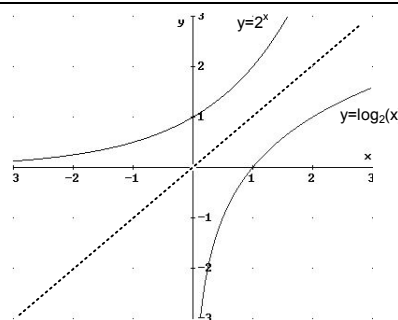
pues $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ si $a>1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ si $a<1$



La función logarítmica, $y=\log_a(x)$, y la función exponencial, $y=a^x$, son funciones inversas entre sí, gráficamente son simétricas respecto de la bisectriz del 1º y 3º cuadrante ($y=x$).

Algunas propiedades de los logaritmos:

- $\log_a(1)=0$ ya que $a^0=1$ ej: $\log_5(1) = 0$, $\log_{0.3}(1) = 0$
- $\log_a(a)=1$ ya que $a^1=a$ ej: $\log_7(7) = 1$, $\log_{0.8}(0.8) = 1$
- $\log_a(x \cdot y)=\log_a x+\log_a y$ ej: $\log_3(8 \cdot 9) = \log_3(8)+\log_3(9)$
- $\log_a(x/y)=\log_a x-\log_a y$ ej: $\log_6(7/2) = \log_6(7)-\log_6(2)$
- $\log_a(x^n)=n \cdot \log_a x$ ej: $\log_2(10^4) = 4 \cdot \log_2(10)$



8. Obtén el valor de x en los siguientes casos:

- a) $\log_7 x = 2$ b) $\log_a x = 0$ c) $\log_8 x = \frac{1}{3}$
- d) $\log_2 64 = x$ e) $\log_{49} \sqrt{7} = x$ f) $\log_8 \sqrt[4]{2} = x$
- g) $\log_x 10 = \frac{1}{4}$ h) $\log_2 \frac{1}{16} = x$ i) $\log_x 0.000001 = -6$

9. Sabiendo que $\log 2=0,301$ y que $\log 3=0,477$, ¿sabrías deducir el valor de: $\log 6$, $\log 9$, $\log 64$, $\log 72$ y $\log \sqrt{12}$?

10. Aplica la definición de logaritmo para averiguar, sin calculadora:

- $\log_3 27$ $\log_5 625$ $\log_7 343$ $\log_2(1/32)$ $\log_3(1/729)$ $\log_{1/2}(1/32)$ $\log_9 3$
- $\log_2 64$ $\log_2 16$ $\log_2 \frac{1}{4}$ $\log_2 \sqrt{2}$ $\log_3 81$ $\log_3 \frac{1}{9}$ $\log_3 \sqrt[4]{3^5}$
- $\log 1000$ $\log 10^9$ $\log 0.01$ $\log 0.000001$

11. Calcula la base de los siguientes logaritmos:

- $\log_b 10000=2$ $\log_b 125=3$ $\log_b 4=-1$ $\log_b 3=1/2$ $\log_b 64=2$ $\log_b 729=3$
- $\log_b 2=1/2$ $\log_b(1/25)=-2$ $\log_b(1/4)=2$ $\log_b 9=4$ $\log_b 5=1/2$ $\log_b(3)=2$

Como casos especiales de logaritmos tenemos los que están en base 10, "decimales", en los que no es necesario poner el subíndice de la base. ej: $\log(13)=\log_{10}(13)$ podemos calcular su valor con la calculadora (tecla "log"). También podemos encontrar en la calculadora los "logaritmos neperianos", tienen como base un número irracional llamado "e = 2.718281...", y su utilización en matemáticas un capítulo a parte.

Para obtener el valor de un logaritmo en una base diferente de "10" y de "e" podemos utilizar la siguiente

relación de cambio de base: $\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}$

- ej: para calcular $\log_4(7) = \frac{\log(7)}{\log(4)} = \frac{0.845...}{0.602...} \approx 1.403...$

12. Averigua con la calculadora: $\log_2 13.5$ $\log_3 5^7$ $\log_4 \sqrt{725}$ $\log_3 10^{-4}$

13. Presión atmosférica es la ejercida por la atmósfera sobre los cuerpos rodeados por ella; se mide por su peso sobre una unidad de superficie, a nivel del mar es de 1 atmósfera y cada kilómetro que se sube, la presión es 0.9 veces la anterior.

a) Completa la siguiente tabla

altura(km)	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	x
presión(atm)				1						

- b) ¿Qué presión hay a 10 km de altura?
 c) ¿Qué presión soporta un submarino que desciende a 5 km de profundidad?
 d) ¿A qué altura se reduce a la mitad la presión?
 e) Escribe y representa gráficamente la función que obtiene la presión en función de la altura.
 f) Un escalador desciende de 5000 a 4000 metros, ¿qué aumento de presión experimenta su organismo?
 g) Un excursionista desciende de un pico situado a 1000 metros de altitud. ¿Qué aumento de presión soporta?
 h) ¿Por qué los resultados de f) y g) no son iguales si en ambos bajaron 1000 metros?

14. Cada año un empresario considera que el valor de su maquinaria se deprecia un 20% por causa de su uso. Si una que le costó 6000 € vale ahora 3600 €, ¿cuánto tiempo hace que la compró?

15. ¿En cuánto tiempo se duplica un capital de 1000 € colocado al 9% de interés compuesto? ¿Y si el capital fuera de 5000 €? ¿Cuánto tiempo tardaría en triplicarse cualquier capital invertido al 20% de interés compuesto?

16. En un bosque en etapa de crecimiento se mide el volumen de madera y se obtiene 10.250 m³. Se observa que el bosque crece a un ritmo del 2% anual.

- ¿Qué cantidad de madera tendrá de aquí a 10 años? ¿Cuánta había hace 3 años?
- Escribe la función exponencial correspondiente y represéntala gráficamente.

17. Resuelve las siguientes ecuaciones aplicando la definición de logaritmo:

- a) $\log_2(2x-1)= 3$ b) $\log_2(x+3)= -1$ c) $\log_4x= 2$
 d) $\log(x-2)= 2'5$ e) $\log(3x+1)= -1$ f) $\log_2(x^2-8)= 0$

18. Resuelve, descomponiendo el segundo término, las siguientes ecuaciones exponenciales:

- a) $3^{x^2-5} = 81$ b) $2^{2x-3} = 1/8$ c) $2^{x+1} = \sqrt[3]{4}$ d) $2^{x+1} = 0'5^{3x-2}$

19. Resuelve, aplicando logaritmos, las siguientes ecuaciones exponenciales:

- a) $5^x=42$ b) $4^{x-1}=186'4$ c) $1'5^x=0'84$ d) $2^{2-5x}=0'125$

20. Resuelve las siguientes exponenciales:

- a) $3^x + 3^{x+2} = 30$ b) $2^{x-1} + 4^{x-3} = 5$ c) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$

21. El polonio-210 es radiactivo y su periodo de semidesintegración (reducirse a la mitad) es de 140 días. Un kilo de esta sustancia, ¿cuántos días tardaría en reducirse a 125 gramos?

22. El 13 de noviembre de 2002, el "Prestige", un petrolero cargado con 77.000 toneladas de fuel, lanzaba un SOS. Fue el inicio de una de las más grandes catástrofes económicas, ecológicas y sociales ocurridas en Galicia. Mientras, el entonces vicepresidente del gobierno español decía que se trataba "sólo de la pérdida de unos hilillos de plastilina", al cuarto día de la catástrofe ya se habían vertido las primeras 4.000 toneladas, afectando a 37 km de la "Costa da Morte", pero cada día que pasaba esta mancha crecería un 35% sobre la costa gallega, que tiene unos 1.700 km de línea de costa. Finalmente, la mancha de petróleo afectó a la costa portuguesa, de Asturias, del País Vasco y sur de Francia.



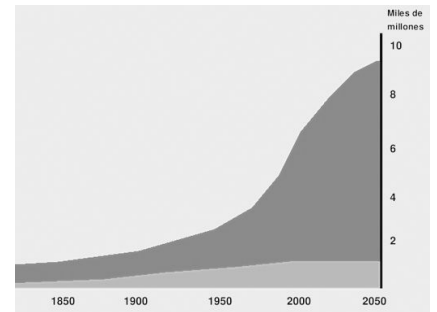
- Haz un estudio del comportamiento de la mancha, escribe la función exponencial $y=k \cdot a^x$ que relaciona las variables tiempo (días) y longitud (km) de costa afectada, represéntala gráficamente.
- ¿Cuánto tiempo pasó hasta que afectó a una longitud de costa de 1.000 km?

23. Un elemento radioactivo tiene un periodo de semidesintegración de 6 meses. Tenemos 8 gramos de ese elemento, escribe la ecuación que expresa la cantidad (gramos) de sustancia radioactiva en función del tiempo transcurrido (años). Representala gráficamente.

• ¿Cuánto tiempo ha de pasar para que queden 80 mg de esa sustancia?

24. Describe y representa gráficamente: $y=\log_3(x)$, $y=\log_{1/3}(x)$, $y=\log(x)$, $y=\ln(x)$

25. Según fuentes de la ONU, el año 2005 éramos 6.500 millones los habitantes del planeta, y el ritmo de crecimiento era de un 1'34% anual como media. Si alrededor de ese año se espera que el crecimiento se mantenga, calcula:



a) ¿Cuántos habitantes había en 1999? ¿Cuántos se espera para el 2010?

b) ¿Qué función matemática relaciona el tiempo y los habitantes del planeta? Representala gráficamente.

c) ¿En qué año se esperan unos 8.000 millones de habitantes en el planeta, si continuara el mismo ritmo?

26. Según fuentes del INE, el número medio de hijos por mujer era en el año 1980 en Alicante de 2'45, mientras que en el año 1990 había bajado hasta 1'51. La gráfica de estos datos se aproxima, más o menos, a una función exponencial del tipo $y=k \cdot a^x$ (x =años, y =número de hijos).

a) A partir de los datos anteriores, averigua el valor de los parámetros “k” y “a”. Representa gráficamente la función obtenida, analizando sus características. ¿Cuántos hijos se esperaba que tuvieran, como media, las mujeres españolas en el año 1995?

b) Pero eso no fue así y a partir del año 1990 comenzó a crecer a un 0'675% anual. Escribe la nueva función obtenida a partir del año 1990, calcula cuántos hijos por mujer se esperaban en el año 1995 y en el año 2005 y representala gráficamente. ¿Cuándo se esperaba, con este ritmo de crecimiento que se volviera a una media de 1'51 hijos/mujer del año 1990?

EJERCICIOS DE REPASO

LOGARITMOS

1) Calcula los siguientes logaritmos, aplicando la definición:

- | | | | | |
|-----------------------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------|--------------------------------------|
| 1. $\log_2 1 =$ | $\log_2 2 =$ | $\log_2 4 =$ | $\log_2 8 =$ | $\log_2 16 =$ |
| 2. $\log_3 1 =$ | $\log_3 3 =$ | $\log_3 9 =$ | $\log_3 27 =$ | $\log_3 81 =$ |
| 3. $\log_4 1 =$ | $\log_4 4 =$ | $\log_4 16 =$ | $\log_4 64 =$ | $\log_4 256 =$ |
| 4. $\log_5 1 =$ | $\log_5 5 =$ | $\log_5 25 =$ | $\log_5 125 =$ | $\log_5 625 =$ |
| 5. $\log 1 =$ | $\log 10 =$ | $\log 100 =$ | $\log 1000 =$ | $\log 10000 =$ |
| 6. $\log_2 \frac{1}{2} =$ | $\log_2 \frac{1}{4} =$ | $\log_2 \frac{1}{8} =$ | $\log_2 \frac{1}{16} =$ | $\log_2 \frac{1}{32} =$ |
| 7. $\log_{\frac{1}{3}} 3 =$ | $\log_{\frac{1}{3}} 9 =$ | $\log_{\frac{1}{3}} 27 =$ | $\log_{\frac{1}{3}} 81 =$ | $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{243} =$ |
| 8. $\log_{11} 121 =$ | $\log_4 4096 =$ | $\log_2 4096 =$ | $\log 100000 =$ | $\log_{0.1} 0.001 =$ |
| 9. $\log_{0.2} 0.008 =$ | $\log_5 3125 =$ | $\log_{2.5} 6.25 =$ | $\log_{0.5} 0.125 =$ | $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{243} =$ |

10. $\log_2 2^{-8} =$ $\log_3 3^{45} =$ $\log 100^5 =$ $\log_4 4^{0.5} =$ $\log_7 7^{-3.5} =$
 11. $\log_{11} \frac{1}{11^2} =$ $\log_{20} \frac{1}{20^{0.01}} =$ $\log_2 2^\pi =$ $\log 10^{-\sqrt{2}} =$ $\log_9 9^{1.4} =$
 12. $\log_4 2 =$ $\log_8 4 =$ $\log_{25} 5^3 =$ $\log_{27} 9^{-5} =$ $\log_{100} 0.001 =$
 13. $\log_3 9^5 =$ $\log_2 64^{150} =$ $\log_{25} 625^3 =$ $\log_4 \sqrt[3]{16} =$ $\log_5 \sqrt[15]{125^{10}}$

2) Calcula de dos formas los siguientes logaritmos: primero realizando la operación indicada entre números antes de hacer su logaritmo y después tomando logaritmos aplicando las propiedades adecuadas.

1. $\log_3(27 \cdot 81 \cdot 243) =$ $\log_2(16 \cdot 64 \cdot 8 \cdot 2) =$ $\log_5(125 \cdot 625 \cdot 25) =$
 2. $\log_2(64^3 \cdot 4) =$ $\log_3 \frac{9^2}{27^3} =$ $\log_4 \frac{16^7 \cdot 64^3}{32^{20}} =$
 3. $\log_3 \frac{243}{81} =$ $\log_5 \frac{625}{125} =$ $\log_4 \frac{7}{343} =$
 4. $\log_4 64^5 =$ $\log_2 64^8 =$ $\log_3 9^{280} =$
 5. $\log_7 343^5 =$ $\log 100^3 =$ $\log_2 \sqrt[14]{2} =$

3) Sabiendo que $\ln 3 = 1.098612$, $\ln 4 = 1.386294$ y que $\ln 5 = 1.609438$ calcula los siguientes logaritmos:

1. $\ln 12$ $\ln 60 =$ $\ln \frac{3}{4}$ $\ln \frac{15}{e}$ $\ln \sqrt[3]{e^{10}} =$
 2. $\ln 225 =$ $\ln \sqrt[4]{36} =$ $\ln \sqrt{1250} =$ $\ln \sqrt[6]{100^9} =$ $\ln(25 \cdot e^3) =$

4) Calcula, utilizando los logaritmos decimales de la calculadora y repite el ejercicio utilizando los neperianos:

$\log_4 26 =$ $\log_2 0.14 =$ $\log_5 80 =$ $\log_{\frac{1}{2}} 4 =$ $\log_{0.7} 2 =$

EQUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

- 1) $2^{x+1} = 256$ 2) $5^x = 625$ 3) $3^{-x+1} = 3^{2x+3}$ 4) $7^{x^2-5x+6} = 1$
 5) $4^{x+3} = 8^{x-2}$ 6) $2 \cdot 3^{x-1} = 162$ 7) $2^x \cdot 3^x = 12 \cdot 18$ 8) $3^{3x-2} = 9^{x^2-2}$
 9) $2^{1-x^2} = \frac{1}{8}$ 10) $3^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1}$ 11) $5^{x^2+5} \cdot 25^{x-4} = \frac{1}{625}$ 12) $5^{2x-1} = \sqrt[3]{25^{x^2-\frac{1}{4}}}$
 13) $3 \cdot \sqrt{128^x} = 12$ 14) $4^{5x+1} = 20$ 15) $5^{3x-7} = 436$ 16) $3^{x+1} = 80$
 17) $2^x - 17 \cdot 2^{x+1} + 264 = 0$ 18) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} = 7$
 19) $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} = -8$ 20) $3^{2x+2} - 28 \cdot 3^x + 3 = 0$
 21) $5^{2x+1} - 5^{x+2} = 2500$ 22) $5^{2x} - 6.5^{x+1} + 125 = 0$
 23) $\log x = 3$ 24) $\log x = -2$ 25) $\log_2 x = \frac{1}{2}$ 26) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{x} = -1$
 27) $\log_2(2x - 1) = 3$ 28) $\log_{\sqrt{7}} 7x = 4$ 29) $\log_x 4 = 2$ 30) $\log_x 243 = 5$
 31) $\log_x 0.001 = 3$ 32) $\log_x 64 = 2$ 33) $\log_{2x} 4 = -2$ 34) $\log_{x^2}(x + 2) = 1$
 35) $2 \log x + 3 \log x = 5$ 36) $\log 2 + \log(x - 3) = \log \sqrt{2x}$
 37) $\log(22 - x) = \log x - 1$ 38) $\log x + \log(3x + 5) = 2$

$$39) \frac{\log(35 - x^3)}{\log(5 - x)} = 3$$

$$41) \frac{\log 2 + \log(11 - x^2)}{\log(5 - x)} = 2$$

$$43) \begin{cases} 2^{x+2y} = 32 \\ 5^{2x-y} = 1 \end{cases}$$

$$44) \begin{cases} 5^{x+y} = 25^3 \\ 5^{x-y} = 25 \end{cases}$$

$$47) \begin{cases} 3 \cdot 4^x + 3^{y+1} = 57 \\ 8 \cdot 4^{x-1} - 3^y = 29 \end{cases}$$

$$48) \begin{cases} 2^x + 2^y = 24 \\ 2^{x+y} = 128 \end{cases}$$

$$51) \begin{cases} \log x + 5 \log y = 7 \\ 5 \log x - \log y = 4 \end{cases}$$

$$53) \begin{cases} x - y = 9 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$$

$$40) \frac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2$$

$$42) \frac{\log(4 + x) + \log(4 - x)}{\log(3x + 4)} = 2$$

$$45) \begin{cases} 3^{3x-y} = \sqrt{3^{10}} \\ 3^{2x+y} = 3 \end{cases}$$

$$46) \begin{cases} 3^x \cdot 3^y = 243 \\ xy = 6 \end{cases}$$

$$49) \begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^{x+y} = 243 \end{cases}$$

$$50) \begin{cases} 2^{2x} + 2^{2y} = 85 \\ 2^{2(x+y)} = 324 \end{cases}$$

$$52) \begin{cases} 2 \log x - 3 \log y = 7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$$

$$54) \begin{cases} 2 \log x^2 - \log y^2 = 4 \\ 2 \log x + \log y^2 = 2 \end{cases}$$