OPERACIONES CON POLINOMIOS

Para sumar y restar monomios, han de ser equivalente, misma parte literal y mismo exponente, lo que hace que para sumar y restar polinomios sumaremos y restaremos los monomios equivalentes.

- ej: $5x^4+12x^4=17x^4$ $(2x^3-7x+9)-(4x^3+2x^2+5x-1)= -2x^3-2x^2-12x+10$

Para multiplicar y dividir monomios, hay que tener en cuenta las propiedades de las operaciones con potencias de igual base, por lo que para multiplicar polinomios, es necesario operar todos los monomios de uno de ellos por todos los del otro.

- ej: $3x^4 \cdot 5x^7=15x^{11}$ $12x^9:3x^7=4x^2$

  $(2x^3-3)\cdot(x^4+6x)=2x^7+12x^4-3x^4-18x =2x^7+9x^4-18x$

Para elevar al cuadrado una suma o una diferencia de monomios, habrá que aplicar las siguientes expresiones notables, al igual que si multiplicamos una suma de monomios por su diferencia.

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

- ej: $(x^3+4)^2=(x^3)^2+2\cdot x^3\cdot 4+4^2=x^6+8x^3+16$

  $(x^3-4)^2=(x^3)^2-2\cdot x^3\cdot 4+4^2=x^6-8x^3+16$

  $(x^3+4)(x^3-4)=(x^3)^2-4^2=x^6-16$

1. Recuerda las siguientes operaciones elementales con polinomios:

a) $(5x^4-3x^2+10x-6)+(9x^4-x^3-10x+4)$ **b)** $(5x^4-3x^2+10x-6)-(9x^4-x^3-10x+4)$
c) $4\cdot(5x^4-3x^2+10x-6)$ **d)** $2x^2\cdot(9x^4-x^3-10x+4)$
e) $(3x^2-6x)^2$ **f)** $(3x^2+6x)^2$ **g)** $(3x^2+6x)\cdot(3x^2-6x)$

2. Opera y simplifica les siguientes expresiones:

a) $x(x^2+1)-3x(-x+3)+2(x^2-x)^2$ **b)** $2(x^2+3)-2x(x-3)+6(x^2-x-1)$
c) $-4x(x-4)^2+3(x^2-2x+3)-2x(-x^2+5)$ **d)** $-3x(x+7)^2+(2x-1)(-3x+2)$
e) $(2a^2+a-1)(a-3)-(2a-1)(2a+1)$ **f)** $(3b-1)(3b+1)-(4b-3)^2-2(2b^2-16b-16)$

3. Expresa como un cuadrado o como un producto de binomios:

a) $25x^2+40x+16$ **b)** $64x^2-160x+100$ **c)** $4x^2-25$
d) x^4+4x^2+4 **e)** x^4-16 **f)** $9x^2-6x^3+x^4$

4. Extrae factor común e identifica productos notables:

a) $12x^3-3x$ **b)** $2x^4+12x^3+18x^2$ **c)** $45x^2-120x+80$ **d)** $3x^3-15x$

5. Efectúa las siguientes divisiones de monomios:

a) $12x^9:3x^4$ **b)** $100x^7:4x^2$ **c)** $7x^{13}:5x^{12}$ **d)** $18x^{32}:6x^{32}$

6. Realiza las siguientes divisiones de polinomios entre monomios:

$(15x^7-6x^4-3x^2):3x^2$ $(20x^9+16x^7-x^6+4x^5-8x^3):4x^3$ $(28x^{10}-21x^8-7x^6):7x^5$

Para dividir polinomios, los ordenaremos y operaremos de manera similar a como se hace con números. Analiza el siguiente ejemplo.

- ej: $(2x^3-5x+3):(x^2-2x)$

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3 \qquad -5x+3 & x^2-2x \\ \cline{2-2}
\underline{-2x^3+4x^2} & 2x+4 \\
\qquad 4x^2-5x & \\
\quad \underline{-4x^2+8x} & \\
\qquad\quad 3x+3 &
\end{array}
\quad \rightarrow \quad (2x^3-5x+3)=(x^2-2x)\cdot(2x+4)+(3x+3)
$$

7. Expresa el resultado de las siguientes divisiones como $D(x)=d(x)\cdot q(x)+R(x)$

a) $(3x^2-7x+5):(x^2-x+1)$ **b)** $(x^3-1):(x^2-1)$ **c)** $(4x^6-12x^5+8x^3):(2x^2+3)$
d) $(18x^5+6x^4-30x^3-1):(3x^3+2x)$ **e)** $(4c^5-2c^3+3c):(c^2-c+2)$ **f)** $(x^5-7x^4+x^3-8):(x^2-3x+1)$
g) $(4x^5+20x^4-18x^3-28x^2+28x-6):(x^2+5x-3)$ **h)** $(45x^5+120x^3+80x):(3x^2+4)$
i) $(6x^4+3x^2-2x):(3x^2+2)$

Para hacer divisiones donde el denominador es un polinomio de primer grado del tipo (x–a), utilizaremos la <u>Regla de Ruffini</u>, la cual utiliza únicamente los coeficientes de los polinomios a operar. Analiza el siguiente ejemplo.

- ej: $(2x^3-5x+3):(x-1)$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 0 & -5 & 3 \\
1 & & 2 & 2 & -3 \\ \hline
 & 2 & 2 & -3 & 0
\end{array}
$$

$q(x)=2x^2+2x-3 \quad R=0$

$(2x^3-5x+3)= (x-1)\cdot(2x^2+2x-3)+0$

8. Aplica la regla de Ruffini para efectuar las divisiones siguientes y expresa el resultado de dos maneras diferentes: $D(x)=d(x)\cdot q(x)+R(x)$ y $\dfrac{D(x)}{d(x)}=q(x)+\dfrac{R(x)}{d(x)}$

a) $(3x^2-7x+5):(x-2)$ **b)** $(x^3-1):(x+1)$ **c)** $(4x^6-12x^5+8x^3):(x-3)$
d) $(3x^3+5x^2-2x):(x+2)$ **e)** $(-x^4+3x^2-2x+1):(x+1)$ **f)** $(x^4-x^2):(x+1)$
g) $(4x^5+6x^4+2x^3-10):(2x+8)$ **h)** $(4x^3-2x^2+x-6):(2x-6)$ **i)** $(3x^5-12x^4+9x-2):(3x+6)$

(Ten en cuenta que si multiplicamos o dividimos numerador y denominador de una división por un mismo número, el cociente continúa siendo el mismo, pero el resto queda multiplicado o dividido por él)

Calcular el valor numérico de un polinomio P(x) en un punto (x=a), consiste en sustituir el valor a en el polinomio, P(a).

Si el valor numérico de un polinomio en un punto (x=a) es cero, P(a)=0, el valor <u>x=a es una raíz</u>, un cero o una solución del polinomio P(x).

- ej: Dado el polinomio $P(x)=x^2-5x+6$ calculamos su valor numérico en los puntos indicados

  en $x=0 \rightarrow P(0)=0^2-5\cdot0+6=6$

  en $x=-1 \rightarrow P(-1)=(-1)^2-5\cdot(-1)+6=1+5+6=12$

  en $x=3 \rightarrow P(3)=3^2-5\cdot3+6=9-15+6=0 \rightarrow x=3$ es una raíz de P(x)

9. Calcula el valor numérico de los siguientes polinomios en los puntos indicados:

a) $P(x)=2x^3+7x^2-15x$ en $a=-5$, $a=1$ y $a=0$
b) $P(x)=7x^4+13x^3-9x^2-13x+2$ en $a=0$, $a=-2$ y $a=2$
c) $R(x)=x^3+2x^2-x-2$ en $a=-3$, $a=-1$ y $a=-2$

Teorema del Resto: "El valor numérico de un polinomio P(x) en un punto x=a, P(a), coincide con el resto de la división P(x):(x–a)"

Demostración: Si dividimos P(x):(x–a) $\rightarrow$ P(x)=(x–a)·q(x)+R

Si calculamos P(a)=(a–a)·q(a)+R $\rightarrow$ P(a)=0·q(a)+R=0+R

P(a)= R tal como queríamos demostrar

10. Averigua cuáles de los números 1, -1, 2, -2, 3 y –3 son raíces de los polinomios:
$P(x)=x^3-7x-6$ $Q(x)=x^3-6x^2-4x+24$ $R(x)=x^4-2x^3-11x^2+12x$

11. Comprueba si los polinomios siguientes son divisibles por (x-2) o por (x+1):
$P(x)=x^3+3x^2-10$ $Q(x)=x^3+2x^2-x-2$ $R(x)=2x^3-5x^2-x+6$ $S(x)=-x^4+3x^3-2x^2$

Si un polinomio con coeficiente fundamental la unidad tiene raíces enteras, éstas son divisores del término independiente del polinomio.

- ej: Dado el polinomio $P(x)=x^2-5x+6$

  x=5 no puede ser una raíz suya, ya que no es divisor de 6.

  sus posibles raíces enteras son: 1, 2, 3, 6, –1, –2, –3 y –6.

Un polinomio tiene como máximo tantas raíces como indica su grado.

- ej: en el caso anterior, puede únicamente haber dos raíces reales, concretamente x=2 y x=3.

12. Extrae factor común, identifica posibles expresiones notables y descompón en factores:
a) $P(x)= 490x^3-420x^2+90x$ **b)** $P(x)=20x^6+60x^4+45x^2$ **c)** $P(x)=81x^4-36x^2$
d) $P(x)=4x-100x^5$

Teorema de Factorización: "Si un polinomio tiene como raíces los valores a, b, c, ..., se puede descomponer en producto de factores de la forma P(x)=k·(x–a)·(x–b)·(x–c)... , k= coeficiente principal de P(x)"

- ej: factorizar el polinomio $P(x)=12x^4+7x^3-7x^2-2x$

  Ya que es un polinomio de 4º grado y se puede extraer factor común x $\rightarrow$

  $P(x)=x\cdot(12x^3+7x^2-7x-2)$ $\rightarrow$ ya hemos hecho una primera descomposición, tenemos la raíz x=0

  Para descomponer el polinomio de 3ʳ grado, Q(x), aplicaremos el Teorema del resto para encontrarle posibles raíces, éstas serían divisores del término independiente $\rightarrow$ 1, -1, 2 y –2

  $Q(1)=12\cdot1^3+7\cdot1^2-7\cdot1-2=12+7-7-2=10$ $\rightarrow$ x=1 no es raíz del polinomio

  $Q(-1)= 12\cdot(-1)^3+7\cdot(-1)^2-7\cdot(-1)-2= -12+7+7-2=0$ $\rightarrow$ x= –1 es raíz del polinomio

  Dividimos por Ruffini Q(x):(x+1) $\rightarrow$ $(12x^3+7x^2-7x-2)=(12x^2-5x-2)(x+1)$

  $$\begin{array}{r|rrrr} & 12 & 7 & -7 & -2 \\ -1 & & -12 & 5 & 2 \\ \hline & 12 & -5 & -2 & 0 \end{array}$$

  $\rightarrow$ $P(x)=x\cdot(x+1)\cdot(12x^2-5x-2)$

  ya tenemos dos descomposiciones con una segunda raíz x= –1

  Para descomponer el polinomio de 2º que nos falta, encontraremos sus raíces resolviendo la ecuación de 2º grado correspondiente.

$12x^2-5x-2=0 \rightarrow x=\dfrac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot12\cdot(-2)}}{2\cdot12}=\dfrac{5\pm\sqrt{121}}{24}\quad\dfrac{5\pm11}{24}\left\langle \begin{array}{l}\dfrac{16}{24}=\dfrac{2}{3}\\[2mm] \dfrac{-6}{24}=\dfrac{-1}{4}\end{array}\right.$

entonces, $x=\frac{2}{3}$ y $x=\frac{1}{4}$ son las nuevas raíces encontradas.

$\rightarrow$ la descomposición definitiva será $P(x)=12\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x-\frac{2}{3})\cdot(x+\frac{1}{4})$

13. Localiza las raíces correspondientes y expresa como producto de factores:

a) $P(x)=x^2-6x-7$ **b)** $P(x)=x^2+12x+35$ **c)** $P(x)=2x^3+2x^2-24x$
d) $P(x)=x^3+2x^2+x$ **e)** $P(x)=4x^3+4x^2-x-1$ **f)** $P(x)=x^3+4x^2+x-6$

14. Localiza las raíces correspondientes y factoriza los polinomios siguientes:

a) $P(x)=x^4+2x^3-23x^2-60x$ **b)** $P(x)=x^5+8x^4+21x^3+18x^2$ **c)** $P(x)=x^4-x^2$
d) $P(x)=10x^4-3x^3-41x^2+12x+4$ **e)** $P(x)=x^3+3x^2+4x+12$ **f)** $P(x)=x^3-7x^2+14x-8$
g) $P(x)=6x^4+5x^3-2x^2-x$ **h)** $P(x)=18x^5-45x^4+16x^3+4x^2$ **i)** $P(x)=2x^3-3x^2$

15. Descompón en producto de factores y calcula el m.c.d. y el m.c.m de los siguientes polinomios:

a) $P(x)=x^2-9$ $Q(x)=x^2-6x+9$
b) $P(x)=x^3-7x^2+12x$ $Q(x)=x^4-3x^3-4x^2$
c) $P(x)=x(x-3)^2(x+5)$ $Q(x)=x^3(x-3)(x^2+x+2)$
d) $P(x)=x^3+3x^2+3x+1$ $Q(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$
e) $P(x)=x^2$ $Q(x)=x^2-x$ $R(x)=x^2-1$
f) $P(x)=x-3$ $Q(x)=x^2-9$ $R(x)=x^2-6x+9$
g) $P(x)=x+2$ $Q(x)=3x+6$ $R(x)=x^2+x-2$
h) $P(x)=2x$ $Q(x)=2x+1$ $R(x)=4x^2-1$

Si observamos los resultados de descomponer en producto de factores los polinomios del apartado d) de la actividad anterior, se trata de las potencias tercera y cuarta de la suma de un binomio.

Ya sabemos que $(a+b)^1=a+b$	sus coeficientes son:	1 1
$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2$	"	1 2 1
$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3$	,,	1 3 3 1
$(a+b)^4=a^4+4\cdot a^3\cdot b+6\cdot a^2\cdot b^2+4\cdot a\cdot b^3+b^4$	,,	1 4 6 4 1

Si nos fijamos en el triángulo de los coeficientes sucesivos, llamado <u>triángulo de Tartaglia</u> o <u>triángulo de Pascal</u>, observamos que cada elemento se obtiene sumando los dos números que tiene encima. Por tanto, la quinta fila, con lo cual, los coeficientes de $(a+b)^5$ serían: 1, 5, 10, 10, 5 y 1.

También se ve que las potencias de a van disminuyendo progresivamente, mientras que las potencias de b van aumentando al mismo ritmo.

Entonces $(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

Así podremos calcular cualquier <u>potencia de cualquier binomio</u>, sólo deberíamos de continuar ampliando el triángulo de Tartaglia, este método para hacerlo recibe el nombre de <u>Binomio de Newton</u>.

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Una fracción algebraica es cualquier cociente donde el denominador tiene una expresión algebraica. Para operar con ellas, aplicaremos les mismas propiedades que para operar con fracciones numéricas.

16. Descompón, reduce a denominador común y opera: $\frac{3x-1}{x}+\frac{x+3}{x^2-2x}-\frac{2x+5}{x-2}$

17. Efectúa las operaciones: **a)** $\frac{x^2-2x+3}{x-2}\cdot\frac{2x+3}{x+5}$ **b)** $\frac{x^2-2x+3}{x-2}:\frac{2x+3}{x+5}$

18. Calcula: **a)** $\frac{1}{x}-\frac{1}{2x}-\frac{1}{3x}$ **b)** $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}$ **c)** $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$ **d)** $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

19. Extrae factor común y simplifica:

a) $\frac{15x+15}{10x+10}$ **b)** $\frac{x+3}{2x+6}$ **c)** $\frac{x^2-x}{x^2}$

20. Descompón en factores y simplifica:

a) $\frac{x^2-1}{x+1}$ **b)** $\frac{x^2-4}{(x+2)^2}$ **c)** $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$ **d)** $\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ **e)** $\frac{x^2-1}{x^4-1}$

21. Haz los siguientes cálculos:

a) $\frac{x}{3}-\frac{2}{x}+1$ **b)** $\frac{x-2}{3}\cdot\frac{x+2}{3}$ **c)** $\frac{1}{x-1}:\frac{x+1}{x}$ **d)** $\frac{x+1}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-1}$

e) $\frac{x}{x-1}-\frac{3}{x}$ **f)** $\frac{3}{x^2}-\frac{x+2}{5x}$ **g)** $\frac{x-2}{3x^2}-\frac{1}{6x}$ **h)** $\frac{x^2}{x^2-2x+1}+\frac{2x+3}{x-1}-3$

22. De una división conocemos el divisor $d(x)=x^2-3x$, el cociente $q(x)=3x+2$ y su resto $R(x)=-5x$, ¿cuál será su dividendo?

23. Tenemos un polinomio $P(x)=x^3-mx^2+5x-2$

a) ¿Cuánto ha de valer el parámetro "m" para que P(x) sea divisible por (x+1)?
b) ¿Y si el resto de la misma división fuese 4?

24. El resto de dividir $(2x^4+kx^3-7x+6):(x-2)$ es igual a –8, ¿cuánto vale k? ¿Y el cociente?

25. Calcula el valor del parámetro "k" para que el cociente de dividir $(x^3-x^2+kx-1):(x-1)$ sea igual a (x^2+1). ¿Cuál será el resto?

26. Efectúa y simplifica: **a)** $\frac{x-2y}{y}+\frac{y+3x}{x}-3$ **b)** $\frac{x^2+y^2}{2xy}-\frac{x+y}{x}-\frac{x-y}{y}+\frac{x}{2y}$

EJERCICIOS DE REPASO

DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

1) Realiza las siguientes divisiones por el método que consideres más adecuado en cada caso:

a) $(3x^5+2x+1):(x+1)$
b) $(x^6-3x^4+x^2-1):(x^2+4)$
c) $(x^6+x^2-3):(x+3)$
d) $(x^4+3x^2-1):(x^4+5)$
e) $(4x^3-8x^2-9x+7):(x-3)$
f) $(2x^4+x^3-4x^2-3x-3):(x^2-2x-1)$
g) $(3x^5-5x^4+2x-1):(x+2)$
h) $(6x^4+5x^3-7x^2+3x+2):(2x^2+3x-1)$
i) $(x^3+4x^2+6):(x-4)$
j) $(3x-7x^2+6x^4+2+5x^3):(2x^2+3x-1)$
k) $(4x^4-12x^2+17x-10):(2x^2-3)$
l) $(x^4-6x^3+2x^2+3x-4):(x^2+x+2)$
m) $(3x^4+4x^2-5x+3):(x^2-2x+3)$
n) $(6x^6+4x^5+3x^3-2):(x^3+6)$

2) Utilizando el Teorema del Resto, calcula los valores numéricos de los polinomios:

a) x^3-2x^2-3 para x = 1
b) $2x^4-2x^3+3x^2+5x+10$ para x = -2
c) $3x^4-2x^3+x^2-5x+1$ para x = 2
d) $5x^3+3x^2-8$ para x = -1
e) $3x^3-5x^2+7$ para x = -4
f) x^4-3x^3+5x-8 para x = 3
g) $x^5-3x^3-54x-2$ para x = -1
h) $x^4-x^3-7x^2+x+6$ para x = -2

3) Determina el valor de m para que:

a) $3x^2-mx+10$ sea divisible por $x-5$
b) $x^4-7x^3+2x^2+4x+m$ sea divisible por $x+5$
c) $x^4-3x^3+2x^2-mx+1$ sea divisible por $x-2$
d) $x^3+2x^2+mx-18$ sea divisible por $x-3$
e) x^4-5x^2+7x+m sea divisible por $x+2$
f) $x^4-5x^3+6x^2-m$ sea divisible por $x-3$
g) x^4-2x^2+mx+2 sea divisible por $x+2$
h) $x^4-x^2+mx-10$ sea divisible por $x-3$
i) x^3+3x^2+mx-3 sea divisible por $x+1$
j) $2x^3+mx^2-x-1$ sea divisible por $x+1$
k) mx^2+x-15 sea divisible por $x+3$
l) la división de $x^4-(m+1)x^3+5x^2+2mx+4$ entre $x+1$ nos dé de resto 10
m) la división de $x^3+x^2+(1+m)x+m$ entre $x+1$ nos dé de resto 5

4) Descompón factorialmente los polinomios siguientes, indicando las raíces de cada uno de ellos y obteniendo el m.c.m. y el m.c.d. de ambos:

a) $P(x)=x^3-2x^2+x$ y $Q(x)=x^3-2x^2-x+2$
b) $P(x)=x^4-5x^2+4$ y $Q(x)=x^3+3x^2-4x-12$
c) $P(x)=3x^4-4x^3-5x^2+2x$ y $Q(x)=x^3-x$
d) $P(x)=x^3-x^2-4x+4$ y $Q(x)=x^4+3x^3-x^2-3x$

5) Descompón, explicando todos los pasos, los siguientes polinomios e indicando todas las raíces localizadas. ¿Cuántas raíces reales tienen como máximo? ¿Cuántas has encontrado que sean enteras?

$P(x)=x^2-x-2$	$P(x)=x^2-11x+30$	$P(x)=x^3-7x+6$
$P(x)=3x^3+7x^2-7x-3$	$P(x)=3x^3+5x^2+2x$	$P(x)=4x^3+12x-14+3x^2$
$P(x)=x^4-6x^2+8$	$P(x)=x^4+4x^3-x^2-16x-12$	$P(x)=2x^4-20x^2+18$
$P(x)=x^4-3x^2-2x$	$P(x)=2x^4-7x^3+4x^2+4x$	$P(x)=x^5-2x^4+2x-4-3x^3+6x^2$
$P(x)=x^5-x^4-7x^3+x^2+6x$	$P(x)=x^7-x^2$	$P(x)=x^8-1$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

1) Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x}{6x^2 - x} =$ **b)** $\dfrac{x^6 + x^4}{x^2 + 2x} =$ **c)** $\dfrac{x^3 - 1}{x + 1} =$

d) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} =$ **e)** $\dfrac{x - 2}{x^2 - 3x + 2} =$ **f)** $\dfrac{x^4 - 5}{x^2 - 25} =$

g) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} =$ **h)** $\dfrac{2x^4 + 3x^2 - 5}{x^2 + 2x + 1} =$ **i)** $\dfrac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 - 4x - 4} =$

2) Realiza las siguientes operaciones entre fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{3}{x-1} + \dfrac{4}{x^2 - 1} =$ **b)** $\dfrac{4}{x^2 + 2x - 3} - \dfrac{3}{x^2 + x - 2} =$ **c)** $x - \dfrac{x^2}{x-1} + \dfrac{x}{x+1} =$

d) $\dfrac{x-2}{2-x} - \dfrac{x^2}{x^2 - 4} - \dfrac{x-2}{x+2} =$ **e)** $\dfrac{3}{2x-4} + \dfrac{1}{x+2} - \dfrac{x-6}{2x^2 - 8} =$ **f)** $\dfrac{3x-1}{x-2} - \dfrac{x+42}{5x^2 - 20} - \dfrac{2}{x+2} =$

g) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9} + \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 6x + 9} =$ **h)** $\left(\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{x}{x-2}\right) : \left(\dfrac{x}{x+2} - \dfrac{1}{x-2}\right) =$ **i)** $\dfrac{x}{3x-3} . \dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2} =$

j) $\dfrac{x}{x+1} : \dfrac{x^2 + x}{x^3 + x^2} =$ **k)** $\left(x^2 - 6x + 9\right) : \dfrac{x^4 - 81}{x^2 + 9} =$ **l)** $\dfrac{x+2}{x - \frac{4}{x}} =$

m) $\dfrac{\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-2}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}} =$ **n)** $\dfrac{x+2}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+2} + \dfrac{x^2 + 14}{2x^2 + 2x - 4} =$ **o)** $\dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x-2}{x+1} + \dfrac{2x^2 + 25}{3x^2 - 3x - 6} =$