Actividades Resueltas: FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARÍTMICA

1. Un deportista llegó a un acuerdo en el año 2005 con un equipo de fútbol. El primer año cobraría 1.200.000 € y cada año se le subiría el 7% de lo que cobraba el año anterior.

a) ¿Cuánto cobrará en el año 2013? ¿Y en el año 2020? (Seguirá de entrenador)

b) Cuando cobre 6.000.000 € el equipo no podrá seguir pagándole. ¿Cuántos años puede estar en el club?

Resolución

Podemos construir una tabla de valores que nos sirva de ayuda en la que:

t: número de años transcurridos desde 2005, y: sueldo anual (en millones de euros)

t	0	1	2	5	10
y	1’2	1’284	1’3739	1’6831	2’3606

Si comparamos los valores de la tabla o si analizamos la situación, nos encontramos con un crecimiento exponencial asociado a la función:

$y = 1'2 \cdot a^t \Leftrightarrow y = 1'2 \cdot 1'07^t$ (1)

Para encontrar el valor de a, tenemos dos opciones:

- Reconocer un crecimiento exponencial en que si 100 € se convierten en 107, 1 € se convertirá en 1’07.
- Dividir $1'284 \div 1'2 = 1'07$; $1'3739 \div 1'284 = 1'07$,...

a) Con esta información, sustituimos en (1):

- En el año 2013, $t = 8 \Rightarrow y = 1'2 \cdot 1'07^8 = 2'0618$ millones de euros
- En el año 2020, $t = 15 \Rightarrow y = 1'2 \cdot 1'07^{15} = 3'3118$ millones de euros

b) Cuando cobre 6.000.000 de euros, y = 6 y nos piden el valor de t. Si sustituimos en (1):

$6 = 1'2 \cdot 1'07^t$ (2)

Si en (2) despejamos $1'07^t = 6 \div 1'2 \Rightarrow 1'07^t = 5$ (3)

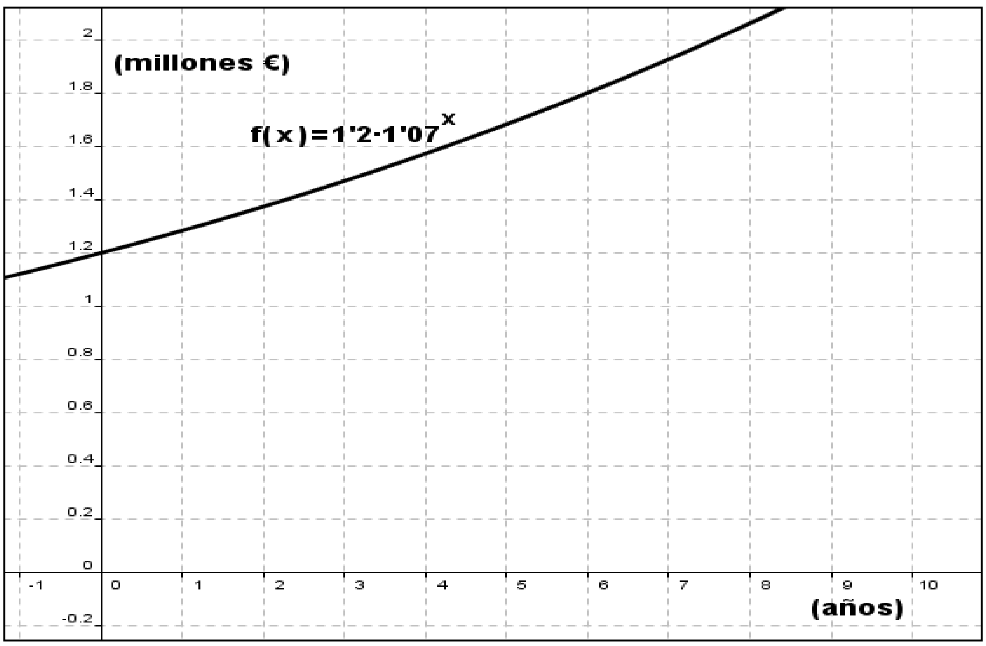
En (3) tomando logaritmos: $\log 1'07^t = \log 5$ aplicando propiedad de los logaritmos:

$t \cdot \log 1'07 = \log 5$ despejando $t = \dfrac{\log 5}{\log 1'07} = \dfrac{0'698...}{0'029...} = 23'78..$

Pasarán, aproximadamente, algo más de 23 años.

NOTA:

Aunque no es lo más deseable, siempre podríamos haber dado las respuestas analizando la tabla de valores e ir ampliándola.



2. **Cada año un empresario considera que el valor de su mercancía es, por causa del deterioro, un 96 % del valor del año anterior. Si una máquina, que le costó 8000 €, vale actualmente 2000 €, ¿cuántos años hace que la compró? ¿Cuál será su valor dentro de 10?**

Resolución

Podemos construir una tabla de valores que nos sirva de ayuda en la que:

x: número de años transcurridos desde que compró la máquina

y: valor de la máquina

x	0	2	4	6	7
y	8.000	6480	5.248’8	4.251’5	3.826’4

Si comparamos los valores de la tabla o si analizamos la situación, nos encontramos con un decrecimiento exponencial asociado a la función:

$y = 8.000 \cdot a^x \Leftrightarrow y = 8.000 \cdot 0'90^x$ (1)

Para encontrar el valor de a, tenemos dos opciones:

- Reconocer un decrecimiento exponencial en que si 100 € se convierten en 90, 1 € se convertirá en 0’90.
- Dividir 6.480 ÷ 8.000 = 0’9; 5.248’8 ÷ 6.480 = 0’9,...

a) Si el valor actual es de 3.000 €, sustituimos en (1) y por 3.000:

$2.000 = 8.000 \cdot 0'9^x$ (2)

Si en (2) despejamos $0'9^x = 2.000 \div 8.000 \Rightarrow 0'9^x = 0'25$ (3)

En (3) tomando logaritmos: $\log 0'9^x = \log 0'25$ aplicando propiedad de los logaritmos:

$x \cdot \log 0'9 = \log 0'25$ despejando $x = \dfrac{\log 0'25}{\log 0'9} = \dfrac{-0'602...}{-0'045...} = 13'157..$

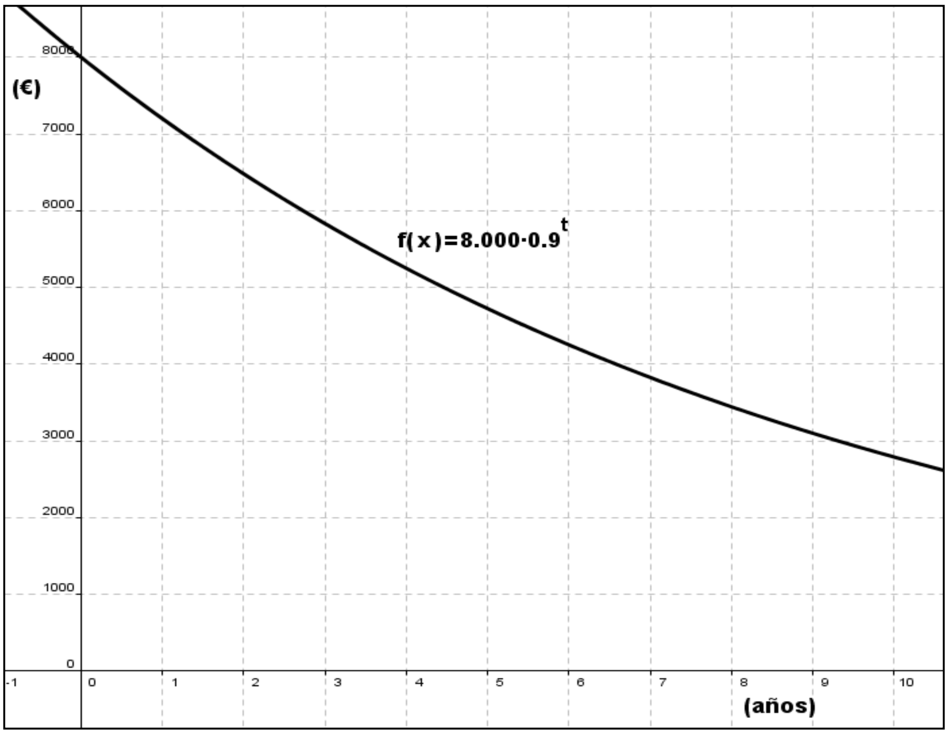
Han pasado aproximadamente 13 años desde que la compró.

b) Si x = 10, sustituimos en (1):

$y = 8.000 \cdot 0'9^{10} = 2.789'4$ €

NOTA:

También en este caso podríamos haber dado las respuestas analizando la tabla de valores e ir ampliándola.



3. La población de una granja de pollos ha pasado de 1500 a 1800 aves en el primer mes. Se sabe que dicha población crece siguiendo una ley exponencial. Calcula:

a) La función que rige la población en relación al tiempo transcurrido.

b) La población al cabo de 10 meses.

c) El tiempo que tardará la población en superar los 13300 individuos.

d) Dibuja su gráfica

Resolución

a) La función f buscada será de la forma $f(t) = k \cdot a^t$, donde t indica el tiempo en meses, y k es el valor inicial de f cuando t = 0

Con estas condiciones, se tiene que k = f(0) = 1.500, y sólo queda hallar a:

En el primer mes t=1 $f(1) = 1.800 = 1.500 \cdot a^1 = 1.500 \cdot a$, de donde $a = \dfrac{1800}{1500} = 1'2$

La función buscada es $f(t) = 1500 \cdot 1'2^t$, donde t se da en meses.

b) Al cabo de 10 meses, la población será de $f(10) = 1500 \cdot 1'2^{10} = 9.288$ pollos.

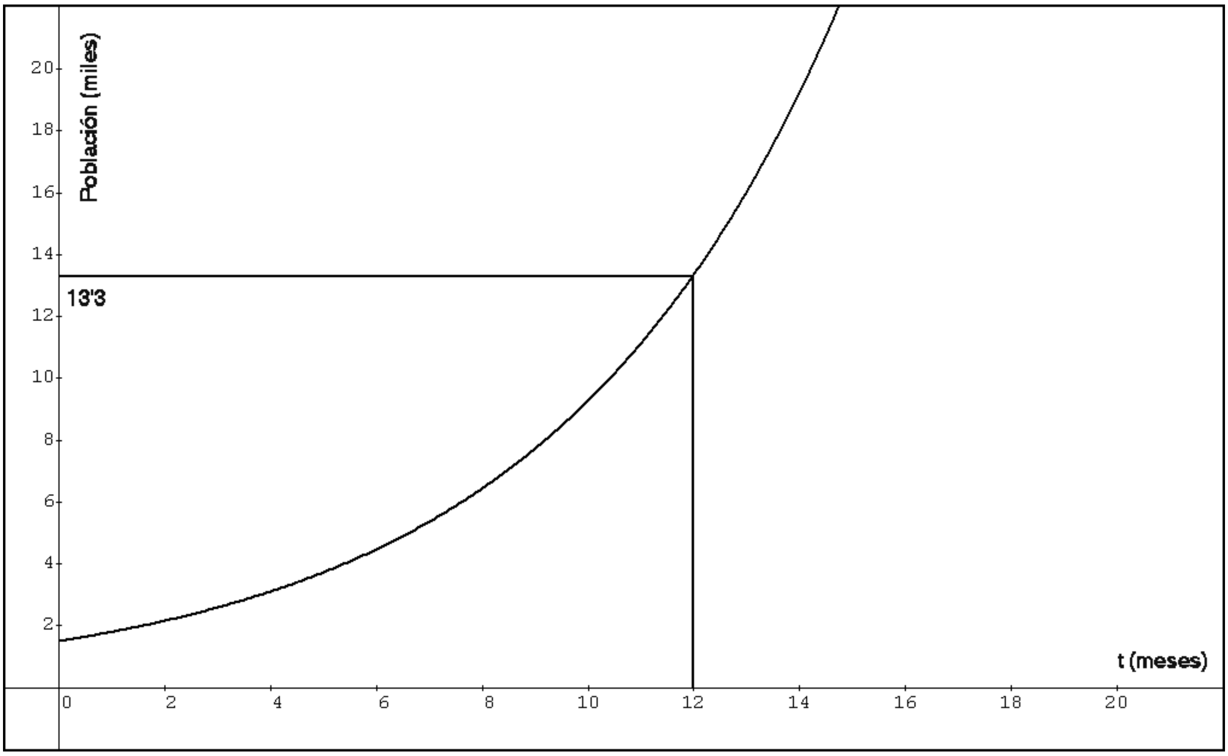
c) Hay que resolver la ecuación exponencial: $13.300 = 1500 \cdot 1'2^t \Rightarrow 1'2^t = \dfrac{13300}{1500} = 8'8\widehat{6}$

Tomando logaritmos se llega a que:

$t \cdot \log 1,2 = \log 8,866666...$ y, por tanto, $t = \dfrac{\log 8'86}{\log 1'2} = 11'97$ meses

Así, al cabo de un año, la población superará los 13.300 ejemplares.

d) La gráfica es:



4. El porcentaje de personas que responden a un cuestionario sobre determinadas características relativas a la atención del cliente de un centro comercial depende del número de días, t, y se indica mediante la función:

$$\mathbf{f(t) = 85 - 100 \cdot e^{-0'2t}}$$

a) ¿Qué porcentaje de personas se estima que responden a dicho cuestionario al cabo de 8 días? ¿Y al cabo de 10 días?

b) ¿Cuántos días habrá que hacer el cuestionario hasta que se consiga un 80 % de personas que respondan al cuestionario?

c) ¿Será posible llegar a conseguir un 90 % de personas que respondan al cuestionario?

Resolución

a) Simplemente hay que calcular f(8) y f(10). Así:

$f(8) = 85 - 100 \cdot e^{-0'2 \cdot 8} \approx 65$ %

Un 65 % de personas responderán a los 8 días.

$f(10) = 85 - 100 \cdot e^{-0'2 \cdot 10} \approx 71$ %

Al cabo de 10 días se estima que el porcentaje de personas que responda alcance el 71 %.

b) En este caso, nos piden el valor de t para que f(t) = 80. Si sustituimos en la función:

$80 = 85 - 100 \cdot e^{-0'2t} \Rightarrow -5 = -100 \cdot e^{-0'2t} \Rightarrow 100 \cdot e^{-0'2t} = 5 \Rightarrow e^{-0'2t} = 0'05 \Rightarrow$

tomando logaritmos neperianos $\quad -0'2t = \ln 0'05 \Rightarrow t = \dfrac{\ln(-0'05)}{-0'2} = \dfrac{-2'995..}{-0'2} = 14'97..$

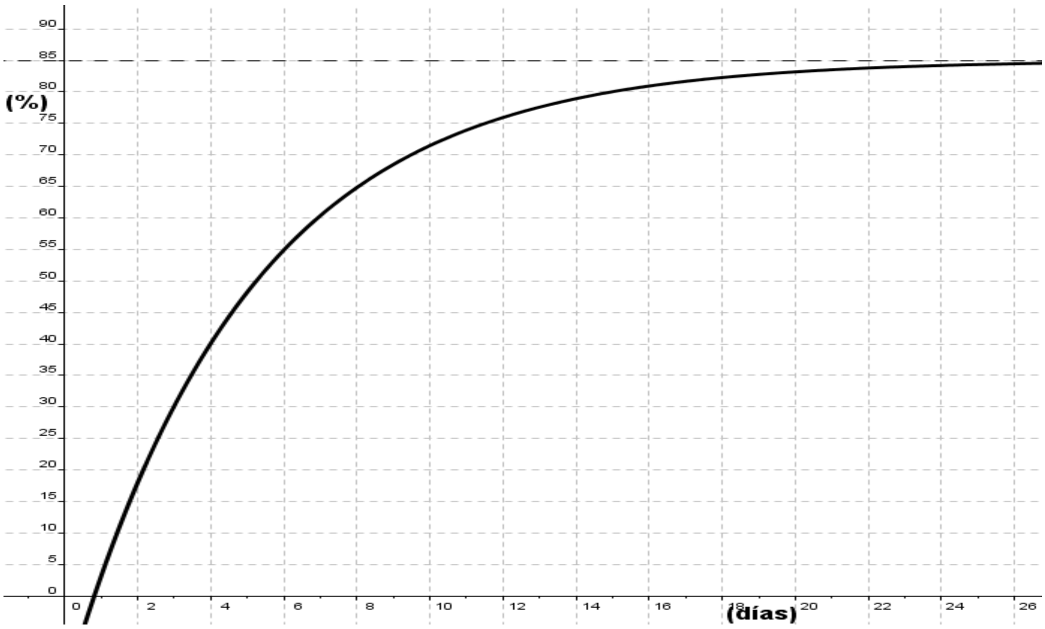
Habrá que estar trabajando durante 15 días aproximadamente.

c) Nos están pidiendo que comprobemos si es posible que:

$$\lim_{t\to\infty}(85 - 100 \cdot e^{-0'2t}) = 90$$

$$\lim_{t\to\infty}(85 - 100 \cdot e^{-0'2t}) = \lim_{t\to\infty}85 - \lim_{t\to\infty}100 \cdot e^{-0'2t} = 85 - 100 \cdot \lim_{t\to\infty}e^{-0'2t} = 85 - 0 = 85$$

Por muchos días que se trabaje, no es posible superar el 85 % de personas.



5. Las conclusiones de un estudio establecen que el número de individuos de una determinada población de una especie protegida vendrá dado en los próximos años, por la siguiente función:

$f(t) = 100 \cdot \log\left(\frac{1000t + 100}{t + 10}\right)$ siendo t el número de años transcurridos.

a) ¿Cuál es el tamaño actual de la población?

b) Si esta función fuese válida indefinidamente, ¿se estabilizaría el tamaño de la población? ¿En qué valor?

Resolución

a) Nos piden el valor de f(0).

$$f(0) = 100 \cdot \log\frac{100}{10} = 100 \cdot \log 10 = 100 \cdot 1 = 100 \text{ individuos.}$$

b) Nos están pidiendo que hallemos $\lim_{t\to\infty} f(t)$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty}\left[100 \cdot \log\left(\frac{1000t+100}{t+10}\right)\right] = 100 \cdot \lim_{t\to\infty}\left[\log\left(\frac{1000t+100}{t+10}\right)\right] =$$

$$100 \cdot \log\left[\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1000t+100}{t+10}\right)\right] = 100 \cdot \log\left[\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1000t}{t}\right)\right] = 100 \cdot \log 1000 = 100 \cdot 3 = 300$$

El tamaño de la población se estabilizará en unos 300 individuos.