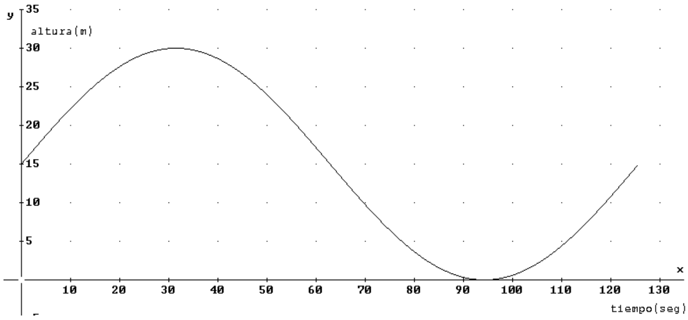
FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

La altura a la que está una cesta de una noria al dar ésta una vuelta completa, en función del tiempo, viene expresada por la gráfica adjunta.
Para vueltas sucesivas, esta misma gráfica se repetirá indefinidamente mientras la noria esté en marcha, es lo que se llama una función periódica. $\rightarrow$ f(x+k)=f(x) donde k es el periodo.



Con este tipo de funciones se puede estudiar cualquier tipo de ondas y todas ellas están basadas en las funciones trigonométricas. Concretamente, la función arriba representada es la que tiene por expresión analítica $y = 15 \cdot sen(x/20) + 15$.

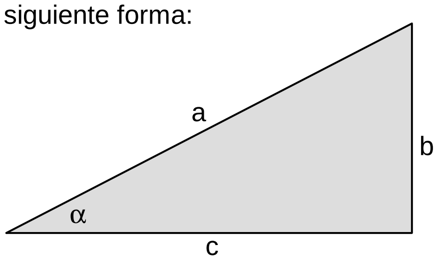
Recordemos algunos conceptos básicos de trigonometría:

Dado un triángulo rectángulo como el de la figura, definimos las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo α de la siguiente forma:

sen(α)= $\dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \dfrac{b}{a}$

cos(α)= $\dfrac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \dfrac{c}{a}$

tg(α)= $\dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \dfrac{b}{c}$



Es evidente comprobar que:

tg(α)= $\dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$

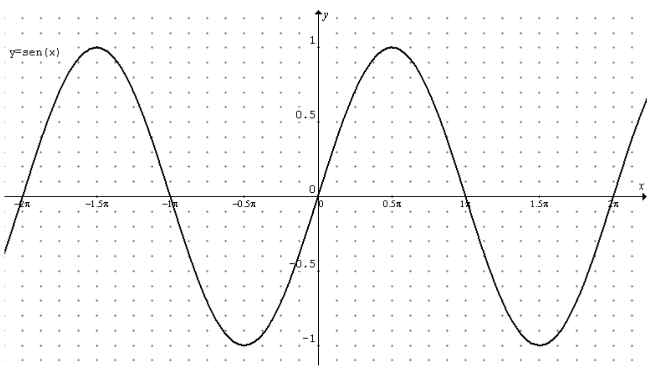
y que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

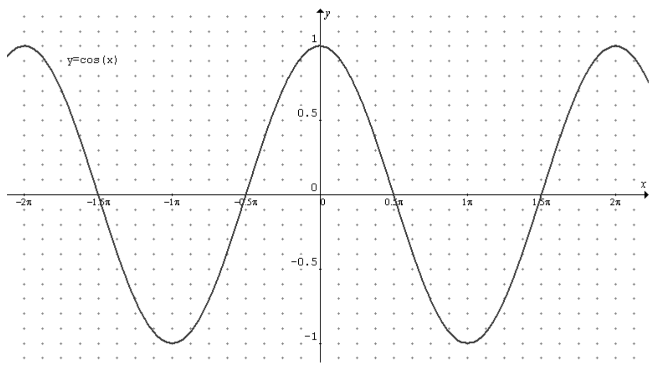
Normalmente medimos los ángulos en grados sexagesimales, pero para representar las funciones trigonométricas es más útil otra unidad de medida de ángulos como el **radián**. Un radián es la medida de un ángulo cuyo arco correspondiente es igual al radio, como la longitud de una circunferencia es $2\cdot\pi\cdot R$ y ésta abarca un ángulo de 360º $\rightarrow$ 2π radianes.

Recordemos la equivalencia entre grados y radianes, así como las razones trigonométricas de algunos ángulos fundamentales, que a la vez, nos servirán para dibujar las funciones trigonométricas elementales.

Grados	0	30	45	60	90	180	270	360
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
seno	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	-1	0	1
tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0	$-\infty$	0

Con los datos anteriores, representamos las **funciones trigonométricas**:



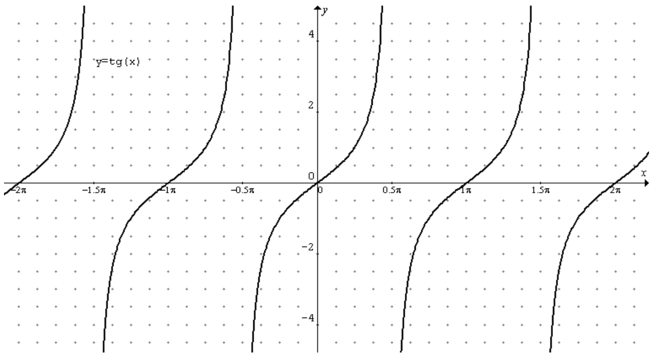


<u>y=sen(x)</u>

Periódica de periodo 2π
Acotada entre [-1,+1]
Continua
Corta eje OX en $x_1=0$, $x_2=\pi$ y $x_3=2\pi$
Crece en $[0,\pi/2]$ y en $[3\pi/2,2\pi]$
Decrece en $[\pi/2, 3\pi/2]$
Máximo relativo en $(\pi/2,1)$
Mínimo relativo en $(3\pi/2,-1)$

<u>y=cos(x)</u>

Periódica de periodo 2π
Acotada entre [-1,+1]
Continua
Corta eje OX en $x_1=\pi/2$ y $x_2=3\pi/2$
Crece en $[\pi,2\pi]$
Decrece en $[0, \pi]$
Máximos relativos en $(0,1)$ y $(2\pi,1)$
Mínimo relativo en $(\pi,-1)$

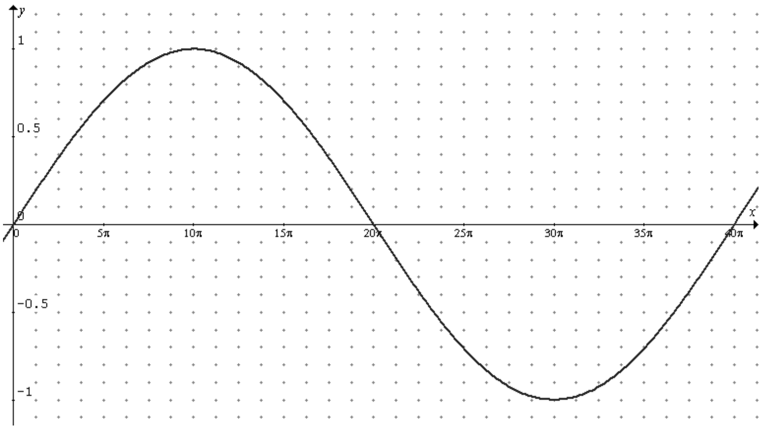


<u>y=tg(x)</u>
Periódica de periodo π
No acotada, ni inferior ni superiormente
Discontinua en x=π/2 y x=3π/2
Corta eje OX en $x_1=0$, $x_2=\pi$ y $x_3=2\pi$
Toda Creciente
No existen máximos ni mínimos relativos
Asíntotas verticales en x=π/2 y x=3π/2

<u>Vamos a construir la función del ejemplo inicial</u>: $y = 15 \cdot sen(x/20) + 15$ haciendo variaciones sobre y=sen(x)

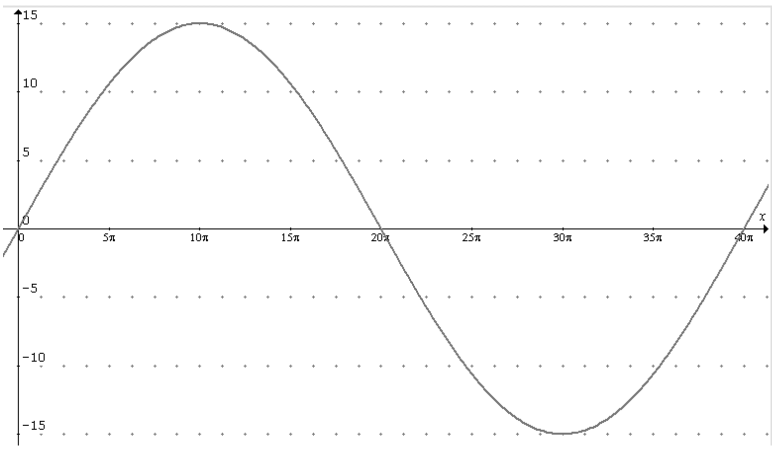
Ensanchemos horizontalmente la función 20 veces, para que llegue el tiempo hasta 20·2π =40π ≈ 126 segundos, que es el tiempo aproximado que tarda la noria en dar una vuelta →

y=sen(x/20)



Estiremos verticalmente la función 15 veces, para que su recorrido sea de 15·2=30 metros, que es la altura máxima que alcanza →

y=15·sen(x/20)



Por último, **subamos la función 15 unidades,** para que la altura máxima coincida con los 30 metros y la mínima con los 0 metros del suelo → **y=15·sen(x/20)+15**